実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と 300 回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

高３　ハイレベル数学Ⅲ

目　次

第 １ 講　複素数平面の基礎 ―― p.4
第 ２ 講　複素数で点を移動 ―― p.8
第 ３ 講　複素数の方程式と図形 ―― p.12
第 ４ 講　ド・モアブルの定理 ―― p.16
第 ５ 講　２次曲線 ―― p.20
第 ６ 講　媒介変数で表示された曲線 ―― p.24
第 ７ 講　極限の基本 ―― p.28
第 ８ 講　漸化式と極限 ―― p.32
第 ９ 講　ちょっと困った極限 ―― p.36
第 10 講　無限級数 ―― p.40
第 11 講　微分の基本 ―― p.44
第 12 講　接線など ―― p.48
第 13 講　グラフの描き方（その１） ―― p.52
第 14 講　グラフの描き方（その２） ―― p.56
第 15 講　最大・最小 ―― p.60
第 16 講　実数解に関する問題 ―― p.64
第 17 講　不等式について ―― p.68
第 18 講　積分の基礎 ―― p.72
第 19 講　部分積分 ―― p.76
第 20 講　置換積分 ―― p.80
第 21 講　面積 ―― p.84
第 22 講　体積 ―― p.88
第 23 講　積分でやっておくこと（その１） ―― p.92
第 24 講　積分でやっておくこと（その２） ―― p.96

第１講　複素数平面の基礎

1

［A］　座標平面において，点 A を原点を中心として θ だけ回転し，さらに，ベクトル $\vec{a}$ だけ移動した点を P とする．点 A を $\vec{a}$ だけ移動し，さらに原点を中心として θ だけ回転した点を Q とする．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．

(1)　点 A を $(1,\ 0)$ としたとき，点 P が $(1,\ 1)$ となるような θ, $\vec{a}$ のうち，$\vec{a}$ の大きさを最小にするものを求めよ．

(2)　$\vec{a}$ の大きさを l，P と Q の距離を d とするとき $d \leqq 2l$ であることを示せ．

［B］　複素数 α，β は $3\alpha^2 + 5\beta^2 - 6\alpha\beta = 0$，$|\alpha + \beta| = 1$ を満たすとする．

(1)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を求めよ．

(2)　$\arg\left(\dfrac{\beta - \alpha}{\beta}\right)$ を求めよ．

(3)　$|\beta|$ を求めよ．

(4)　複素数平面上で 0，α，β を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ．

< Note >

第1講　複素数平面の基礎

1　次の問いに答えよ．

(1)　座標平面上の点 A(2, 1) を原点 O のまわりに 60° 回転した点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A(2, 1) を点 P のまわりに 60° 回転した点の座標は $\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった．点 P の座標を求めよ．

＜ Note ＞

第２講　複素数で点を移動

2

［A］ 2つの異なる定まった複素数 α, β がある．自然数 n と複素数 w が与えられたとき，複素数 z_n を，

$$\frac{z_n-\alpha}{\beta-\alpha}=w^n$$

で定める．α，β，z_n の表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，P_n とする．

(1) 3点 A，B，P_1 および A，B，P_2 が面積の等しい三角形をつくるための w の条件を求め，これを複素数平面上に図示せよ．

(2) $\alpha=0$，$\beta=i$ とし，w が(1)で求めた条件を満たしながら変わるとき，P_2 の描く図形を図示せよ．

［B］ 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える．

『原点と異なる点 α を中心として点 z を θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる』

(1) $\alpha=i$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(2) (α, θ) を1組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するときの θ の値を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

＜ Note ＞

第２講　複素数で点を移動

2　複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に 1 進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達したあと 45° 回転してから前回進んだ距離の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．このとき点 P_{10} が表す複素数を求めよ．

＜ Note ＞

第３講　複素数の方程式と図形

3

［A］ k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに θ だけ回転して得られる 3 点を ω_1，ω_2，ω_3 とする．ω_1，ω_2，ω_3 およびそれらと共役な点 $\overline{\omega}_1$，$\overline{\omega}_2$，$\overline{\omega}_3$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ．

［B］ 複素数平面上の点 z を考える．

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか，ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか．

＜ Note ＞

第３講　複素数の方程式と図形

3　k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，$\beta\,(\alpha\neq\beta)$ とする．i を虚数単位として次の問いに答えよ．

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ．

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする．$\angle$APB が直角になるような k の値を求めよ．

＜ Note ＞

第４講　ド・モアブルの定理

4

［A］ α を 0 でない複素数とする．$\beta^2=\alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ．

［B］ 複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たしている．このとき，$|\alpha^m+\alpha^{-m}|>1$ となる自然数 m が存在することを示せ．

< Note >

第４講　ド・モアブルの定理

4　$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，方程式 $z^5+\frac{1}{z^5}=2\cos 3\theta$ $(0<\theta<\pi)$ を満たす θ の個数は，合計 ☐ 個である．

< Note >

第５講　２次曲線

5

［A］　円 $C_1：x^2+(y-1)^2=1$ と楕円 $C_2：\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．

(1)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を固定し，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を b で表せ．ただし，O は原点とする．

(2)　P を C_1 上，Q を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

［B］　双曲線 $C：9x^2-y^2=9$ について，次の(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1)　この双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ．

(2)　直線 $l：y=mx+n$ と双曲線 C が異なる２つの共有点をもつための条件を m，n の式で表せ．

(3)　直線 l と双曲線 C の共有点を P，Q，直線 l と双曲線 C の２本の漸近線との共有点を R，S とするとき PR＝QS が成立することを証明せよ．

< Note >

第5講　2次曲線

5　次の問いに答えよ．

(1)　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$（ただし $x_0\neq 0$）を考え，点Qと F を通る直線を l_1，点Qを通り放物線 C の軸に平行な直線を l_2 とする．このとき，点Qにおける C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を2等分することを示せ．

(2)　放物線 $y=x^2-2\sqrt{2}\,x+4$ 上の点 $\mathrm{R}(a,\ b)$ $(a>\sqrt{2}\,)$ における接線と直線 $x=a$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点Rを通り傾きが $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

< Note >

第６講　媒介変数で表示された曲線

6

［A］　$(x,\ y)=(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$　$(0 \leqq t < 2\pi)$ で表される曲線を図示せよ．

［B］　$(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2}\cos t,\ \sin t+\dfrac{1}{3}\cos 2t\right)$　$(0 \leqq t < 2\pi)$ で表される曲線を図示せよ．

＜ Note ＞

第６講　媒介変数で表示された曲線

6　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$　$(0\leqq t\leqq \pi)$ で表される曲線を図示せよ．

< Note >

第７講　極限の基本

7

［A］ 次の極限を求めよ．ただし，n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}$　$(0<a<1)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

［B］ 等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=1$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

＜ Note ＞

第７講　極限の基本

7　$\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+1}+ax+1)$ は $a=$ ☐ であるとき，かつそのときに限り極限値 ☐ をもつ.

＜ Note ＞

第８講　漸化式と極限

8

［A］ p を 0 でない実数とする．数列 a_1，a_2，…… を次のように定義する．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $|p|=1$ のとき，a_n を求めよ．

(2) $|p|\neq 1$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

［B］ 2次方程式 $x^2-5x-5=0$ の2つの解を α，β $(\alpha<\beta)$ とし，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ により定める．このとき，$a_1=\boxed{}$，$a_2=\boxed{}$，$a_3=\boxed{}$ であり，$\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\boxed{}\,a_{n+1}+\boxed{}\,a_n$$

を満たす．実数 t に対し，t を超えない最大の整数を記号 $[t]$ で表し，$\langle t\rangle=t-[t]$ とおく．たとえば，$\left\langle -\dfrac{1}{3}\right\rangle=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．2つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$p_n=\langle\alpha^n\rangle$$
$$q_n=\langle\beta^n\rangle$$

により定める．$[\alpha]=\boxed{}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\boxed{}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=\boxed{}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n}=\boxed{}$ となる．すべての n について $\langle a_n\rangle=\boxed{}$ である．したがって，次の極限値が得られる．

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\boxed{}$$
$$\lim_{n\to\infty}q_{2n}=\boxed{}$$

< Note >

第８講　漸化式と極限

8　ある１面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面(底面)の４辺のうち１辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ．

< Note >

第９講　ちょっと困った極限

9

［A］　関数 $f(x)=|x^2-2x|$ に対して，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との共有点の座標を求めよ．

(2)　$0<a_1<1$ ならば，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ で与えられることを示せ．

(3)　$1\leqq a_1\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき，グラフを利用して極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［B］　n を自然数とする．次の各問いに答えよ．

(1)　自然数 k は $2\leqq k\leqq n$ を満たすとする．9^k を 10 進法で表したときの桁数は，9^{k-1} の桁数と等しいか，または 1 だけ大きいことを示せ．

(2)　9^{k-1} と 9^k の桁数が等しいような $2\leqq k\leqq n$ の範囲の自然数 k の個数を a_n とする．9^n の桁数を n と a_n を用いて表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

＜ Note ＞

第9講　ちょっと困った極限

9 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ と $a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) $x_1<x_2<2$ のとき，$f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(3) $n=3$，4，$\cdots$ に対し，$a_n<1+\frac{2}{n}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

< Note >

第10講　無限級数

10

［A］　$-1<x<1$ とする．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$$

［B］　正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり，曲線 $y=px^p$ $(p>1)$ 上の点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている．また，$a_1=1$ である．

(1)　a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き，a_k を求めよ．

(2)　接線 l_k と直線 $x=a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし，曲線 $y=px^p$ と接線 l_k および直線 $x=a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする．$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$ と $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k$ を求めよ．

< Note >

第10講　無限級数

10　$f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3$ とする．$x_1=1$ とおいて数列 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をつくり，座標平面上に点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ f(x_n))$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ．

(2)　動点Pが点 P_1 を出発して，P_2，P_3，P_4，…，P_n，… と進むとき，動点Pはどのような点に近づくか，その座標を求めよ．

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを l_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．$L=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ．

< Note >

第11講　微分の基本

11

［A］ (5)は $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，a は実数の定数，n は自然数とする．

(1) $y=(3x-2)^2(x^2+x+1)^3$

(2) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(3) $y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$

(4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

(5) $y=x^m$ （m は有理数）

(6) $y=x^{\cos x}$ （$x>0$）

(7) $x=\cos y$ （$0\leqq y\leqq\pi$）

(8) $x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$ （$t>0$）

(9) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=xy$

［B］ 商の微分の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を示せ．

＜ Note ＞

第11講　微分の基本

11　定義に従って微分することにより，以下の微分の公式

$$\{\sqrt{f(x)}\}' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

を示せ.

< Note >

第12講　接線など

12

［A］ A，B を $AB \neq 0$ を満たす定数とする．2次曲線 C：$Ax^2+By^2=1$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は $A\alpha x+B\beta y=1$ となることを示せ．

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{3\pi}{4}$ の a を適当にとって，$y=\sin^2 x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos(x-a)$ のグラフが共有点で共通の接線をもつようにする．このとき $\sin a$ の値を求めよ．

(2) xy 平面上の2つの曲線

$$\begin{cases} C_1：y=-e^{-x} \\ C_2：y=e^{ax}\ （ただし，a>0） \end{cases}$$

のどちらにも接する直線を l とする．l が C_1 に接する点の x 座標を求めよ．

< Note >

第 12 講　接線など

12　a，b を実数とする．2 つの関数

$$f(x)=\log(x^2+1)$$
$$g(x)=ax^2+b \quad (a\neq 0)$$

について，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

< Note >

第13講　グラフの描き方（その１）

13

［A］ 次の関数に対し，$y=f(x)$ のグラフを描け．

(1) $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+19}{x^2+1}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+3}$

［B］ $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$ とするとき，$y=f(x)$ の凹凸も調べてグラフを描け．

< Note >

第 13 講　グラフの描き方（その１）

13　関数 $f(x)=(x^2-1)e^x$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求め，曲線 $y=f(x)$ の概形を描け．

(2)　この曲線の変曲点のうちで x 座標がもっとも大きいものを求め，またそこにおける接線の方程式を求めよ．

< Note >

第14講　グラフの描き方（その2）

14

［A］　$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\dfrac{\sin^2 x \cos x}{1+\sin x}$ とおくとき，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

［B］　次式で表される関数のグラフについて，次の問いに答えよ.

$$y=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1} \qquad \text{ただし，} a \text{ は正の定数とする.}$$

(1)　$a<4$ では，y は極値をもたないことを示せ.

(2)　$a>4$ では，y は $1<x<\dfrac{a}{2}$ において極小値をとり，$\dfrac{a}{2}<x$ において極大値をとることを示せ.

(3)　x が正の値から 0 に近づくとき，y の値はどのように変化するか説明せよ．また，x が負の値から 0 に近づくときについても説明せよ.

(4)　以上の結果より，$a<4$，$a=4$，$a>4$ の各場合に対して，グラフの概形を描け.

< Note >

第 14 講　グラフの描き方（その２）

14　$f(x)=2\sin x+\sin x\cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け.

< Note >

第15講　最大・最小

15

［A］ xy 平面上を速さ1で自由に動くことのできる点Pがあって，直線 $y=\sqrt{3}x$ 上を動くときのみ速さ2で動くことができる．このとき，動点Pが原点Oを出発して，点 $\mathrm{A}(2,\ \sqrt{3})$ に至るまでの最小時間を求めよ．

［B］ α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

< Note >

第 15 講　最大・最小

15　座標空間内に 4 点 A(1，0，0)，B(0，1，0)，C$(-\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)$，D$(0,\ -\cos\beta,\ -\sin\beta)$ がある．ただし，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1)　四面体 ABCD の体積 V を α，β を用いて表せ.

(2)　$\alpha=\beta$ を満たしながら 2 点 C，D が動くとき，V の最大値を求めよ.

＜ Note ＞

第16講　実数解に関する問題

16

［A］ a を正の実数とし，$f(x)=-x+\log(a+x)-\log(a-x)$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．x の方程式 $f(x)=0$ について，$-a<x<a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $0<x<1$ のとき，$x\log x+\log(2-x)>0$ を証明せよ．

(2) a を $0<a<1$ なる定数とするとき，$0<x<a$ の範囲では，方程式 $x^a(2-x)=1$ はただ1つの解をもつことを証明せよ．

＜ Note ＞

第16講　実数解に関する問題

16　x の方程式 $\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k$ が，$x \geqq 0$ の範囲で解をもつための実数 k の満たすべき条件を求めよ．ただし c は $0 \leqq c < 1$ を満たす定数とする．

< Note >

第 17 講　不等式について

17

［A］ すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ．ただし，$\log x$ は自然対数である．

［B］ $0<a<b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

ただし，対数は自然対数とする．

< Note >

第 17 講　不等式について

17　$0<x<1$ のとき，不等式

$$\log\frac{1}{1-x^2}<\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2$$

が成り立つことを示せ.

< Note >

第 18 講　積分の基礎

18

［A］ 次の不定積分を求めよ．ただし，a は正の定数である．また，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{4x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+x)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 3x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2 dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

(9) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

［B］ 次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-3x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x+6}{(x+1)^2(x^2+3)}dx$

< Note >

第 18 講　積分の基礎

18　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1)　$\displaystyle\int (2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

(3)　$\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

(4)　$\displaystyle\int \frac{3x^3-4}{x^3-2x-4}dx$

＜ Note ＞

第19講　部分積分

19

［A］　以下，n を自然数とする．

(1)と(2)は不定積分を求めよ．また，(3)では I_{n+2} を I_n で表し，(4)と(5)では I_{n+1} を I_n で表せ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1)　$\int e^{2x}\sin x\,dx$

(2)　$\int x^2\log x\,dx$

(3)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

(4)　$I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$

(5)　$I_n=\int_1^e (\log x)^n\,dx$

［B］　$I_n=\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

(1)　I_{n+2} を I_n を用いて表せ．

(2)　I_5 を求めよ．

＜ Note ＞

第19講　部分積分

19　n は0または正の整数とし，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ であることを示せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$ を求めよ．

< Note >

第20講　置換積分

20

［A］ (5)までは不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．また，(6)以降は定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle\int\sin(\log x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ．

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

＜ Note ＞

第 20 講　置換積分

20　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする．

(1)　I_1 を求めよ．

(2)　I_n+I_{n+2} を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ．

< Note >

第 21 講　面積

21

［A］ $a>1$ に対して，$S(a)$ を 3 つの曲線

$$y=\sin x,\ \ y=\cos x,\ \ y=a\cos x\quad \left(0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で囲まれた部分の面積とする．

(1) $S(a)$ を a の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 1}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ．

［B］ 方程式 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$ で表される曲線を C,

方程式 $y=x+9+\dfrac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}$ で表される曲線を D とするとき，曲線 C と曲線 D で囲まれた図形の面積を求めよ．

＜ Note ＞

第21講　面積

21　$f(x)=(1+\log x)(e^{x\log x}-x^2)$ とする.

(1)　$e^{x\log x}$ の導関数を求めよ．不定積分 $\int x^2\log x\,dx$ を求めよ.

(2)　$e^{x\log x}=x^2$ となる x の値を求めよ.

(3)　曲線 $y=f(x)$ $(x\geqq 1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

< Note >

第22講　体積

22

［A］ $C: x^2+(y-1)^2=4$ に関して，C を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

［B］ xyz 空間の xy 平面上に

曲線 $C: y=x^2,\ z=0$

直線 $l: y=x+a,\ z=0\quad (a \leqq 1)$

がある．いま C と l の交点を P，Q とし，線分 PQ を底辺とする正三角形 PQR を xy 平面に垂直に作る．直線 l を $a=1$ から C に接するまで動かすとき，この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

< Note >

第 22 講　体積

22　y 軸上の点 C(0，1) に中心をもち，2 直線 $y=bx$，$y=-bx$ に接する円 C がある．ただし，$b>0$ とする．

(1)　C の方程式を求めよ．

(2)　C と $y=bx$ の接点の x 座標が最大となるときの b の値を求めよ．

(3)　C の原点側の円弧と 2 直線で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させる．このときの回転体の体積 V を求めよ．ただし，b は(2)で得られた値を用いよ．

＜ Note ＞

第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23

［A］　座標平面上を運動する点Ｐの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=r(t)\cos t$, $y=r(t)\sin t$ で与えられている．ただし，$r(t)=1+\cos t$ であるとする．

(1)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で，点Ｐの速さ（速度の大きさ）が１となる時刻を求めよ．

(2)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の間に，点Ｐが動いた道のりを求めよ．

［B］　$x>0$ に対して関数

$$f(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x |t^2-x|\,dt$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(3)　関数 $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

＜ Note ＞

第23講　積分でやっておくこと（その1）

23　実数 t に対して，$f(t)=\int_0^1 |e^{-x}-t|\,dx$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$f(t)$ を求めよ．

(2)　$f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

＜ Note ＞

第 24 講　積分でやっておくこと（その２）

24

［A］ e を自然対数の底とする．

(1) $x>0$ で $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$，$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ とする．

$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$ を証明せよ．

(2) $\dfrac{1}{4e}\leqq\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\dfrac{1}{2e}$ を証明せよ．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}ne^{n^2}\displaystyle\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx$ を求めよ．

［B］ n を自然数とする．

(1) $\displaystyle\int_1^n \log x\,dx$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，不等式

$$\frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}-\log n+1>0$$

が成り立つことを示せ．

＜ Note ＞

第24講　積分でやっておくこと（その２）

24　k を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$ を示せ．

(2)　$e\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}<\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e$ を示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

< Note >

テキスト解答

第１講　複素数平面の基礎

1

［A］ 座標平面において，点Aを原点を中心としてθだけ回転し，さらに，ベクトル$\vec{a}$だけ移動した点をPとする．点Aを$\vec{a}$だけ移動し，さらに原点を中心としてθだけ回転した点をQとする．ただし，$0° \leqq \theta < 360°$とする．

(1) 点Aを$(1,\ 0)$としたとき，点Pが$(1,\ 1)$となるようなθ, $\vec{a}$のうち，$\vec{a}$の大きさを最小にするものを求めよ．

(2) $\vec{a}$の大きさをl，PとQの距離をdとするとき$d \leqq 2l$であることを示せ．

［B］ 複素数α，βは$3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$，$|\alpha+\beta|=1$を満たすとする．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$を求めよ．

(2) $\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)$を求めよ．

(3) $|\beta|$を求めよ．

(4) 複素数平面上で0，α，βを3頂点とする三角形の面積を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\theta=45°$，$\vec{a}=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) 略

［B］ (1) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3}$ (2) $\arg\left(\dfrac{\beta-\alpha}{\beta}\right)=\pm 90°$（または$90°$，$270°$） (3) $|\beta|=\sqrt{\dfrac{3}{14}}$

(4) $\dfrac{\sqrt{6}}{28}$

【解説】

［A］ 点A，P，Qを表す複素数をそれぞれα，z，z'とし，$\cos\theta+i\sin\theta=\omega$とおく．さらに$\vec{a}$に対応する複素数を$a$とする．題意より

$$z=\alpha\omega+a,\quad z'=(\alpha+a)\omega$$

となる．

(1) $z=1+i$，$\alpha=1$とすると

$$1+i=\omega+a \iff a=1+i-\omega$$

$$\therefore\ |a|=|1+i-\omega|$$

$$\geqq |1+i|-|\omega|=\sqrt{2}-1$$

等号成立は$1+i=\sqrt{2}\,\omega$のときなので，$\boldsymbol{\theta=45°}$のとき$|a|$は最小となり

$$a=(\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

ゆえに

$$\vec{a}=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2)
$$\begin{aligned} d &= |z'-z| \\ &= |(\alpha+a)\omega-(\alpha\omega+a)| \\ &= |a(\omega-1)| \\ &\leqq |a|(|\omega|+|-1|)=2l \end{aligned}$$

［B］ (1)　$3\alpha^2+5\beta^2-6\alpha\beta=0$ において $\beta=0$ とすると $\alpha=0$ となり $|\alpha+\beta|=1$ に反する．

よって $\beta\neq 0$ なので両辺を β^2 で割ると

$$3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-6\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+5=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3}}$$

(2)
$$\begin{aligned} \frac{\beta-\alpha}{\beta} &= 1-\frac{\alpha}{\beta} \\ &= 1-\frac{3\pm\sqrt{6}\,i}{3} \\ &= \mp\frac{\sqrt{6}}{3}i \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{\arg\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right)=\pm 90^\circ}$$

(3)　$\alpha=\left(1\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i\right)\beta$ より

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta|=1 &\iff \left|\left(2\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i\right)\beta\right|=1 \\ &\iff \sqrt{4+\frac{2}{3}}\,|\beta|=1 \\ &\therefore\quad \boldsymbol{|\beta|=\sqrt{\frac{3}{14}}} \end{aligned}$$

(4)　(2)より

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i \iff \frac{\alpha-\beta}{0-\beta}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}i$$

となるので O(0)，A(α)，B(β) とすると

$$\angle\mathrm{OBA}=90^\circ \text{ かつ } \mathrm{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}\mathrm{OB}$$

ここで(3)より $\mathrm{OB}=\sqrt{\frac{3}{14}}$ なので △OAB の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{AB} &= \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{OB}^2 \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{3}{14} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{28}} \end{aligned}$$

第2講　複素数で点を移動

2

［A］ 2つの異なる定まった複素数 α, β がある．自然数 n と複素数 w が与えられたとき，複素数 z_n を，

$$\frac{z_n-\alpha}{\beta-\alpha}=w^n$$

で定める．α，β，z_n の表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，P_n とする．

(1) 3点 A，B，P_1 および A，B，P_2 が面積の等しい三角形をつくるための w の条件を求め，これを複素数平面上に図示せよ．

(2) $\alpha=0$，$\beta=i$ とし，w が(1)で求めた条件を満たしながら変わるとき，P_2 の描く図形を図示せよ．

［B］ 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える．

『原点と異なる点 α を中心として点 z を θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\frac{1}{2}$ になる』

(1) $\alpha=i$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(2) (α, θ) を1組固定したとき，上の条件を満たす点 z の全体はどんな図形となるか．

(3) 点 α が実軸上にあるとき，(2)の図形が虚軸に接するときの θ の値を求めよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

【答】 ［A］ 略

［B］ (1) 点 $-1+i$ を中心とする，半径 $\frac{1}{2}$ の円

(2) 点 $\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)$ を中心とする，半径 $\frac{1}{2}|\alpha|$ の円　(3) $\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

【解説】

［A］ (1) $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$AP_n=r^nAB,\quad \angle BAP_n=n\theta$$

であり，$\triangle ABP_1$ と $\triangle ABP_2$ の面積が等しいので，

$r>0$，$\sin\theta\neq0$ より

$$\left|\frac{1}{2}AB\cdot AP_1\sin\angle BAP_1\right|=\left|\frac{1}{2}AB\cdot AP_2\sin\angle BAP_2\right|$$

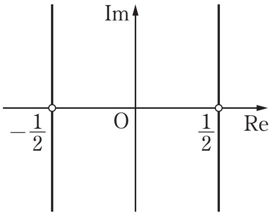
$$\Longleftrightarrow\quad rAB|\sin\theta|=r^2AB|\sin2\theta|$$

$$\Longleftrightarrow\quad r|\cos\theta|=\frac{1}{2}$$

$\sin\theta \neq 0$ かつ $\sin 2\theta \neq 0$ より

$\theta \neq \dfrac{k}{2}\pi$ (k は整数) に注意して,

$$\frac{w+\overline{w}}{2} = \pm\frac{1}{2} \text{ かつ } w \neq \overline{w}$$



(2)
$$\frac{z_2-\alpha}{\beta-\alpha} = w^2 \qquad \therefore \quad z_2 = iw^2$$

ここで $w = \pm\dfrac{1}{2} + ti$ $(t \neq 0)$ とおくと

$$w^2 = \frac{1}{4} - t^2 \pm ti$$

よって

$$iw^2 = \mp t + \left(\frac{1}{4} - t^2\right)i$$

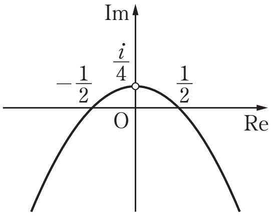
このとき

$$\begin{cases} X = \mp t \\ Y = \dfrac{1}{4} - t^2 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

とおいて $t = \mp X$ を残りの式へ代入して

$$Y = \frac{1}{4} - (\mp X)^2 \text{ かつ } \mp X \neq 0$$

$$\iff \quad Y = \frac{1}{4} - X^2 \ (X \neq 0)$$



［B］　移った点を表す複素数を ω とすると

$$\omega - \alpha = (z-\alpha)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(1)　$\alpha=i$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{cases} \omega-i=(z-i)\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) \\ |\omega|=\dfrac{1}{2}|i| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \omega=i(z-i+1) & \cdots\cdots① \\ |\omega|=\dfrac{1}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①を②へ代入すると

$$② \iff |i(z-i+1)|=\frac{1}{2}$$

$$\iff |z-(-1+i)|=\frac{1}{2}$$

よって，点 z の全体は，**点 $-1+i$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円**

(2)　$\cos\theta+i\sin\theta=\beta$ とおくと

$$\begin{cases} \omega=\alpha+(z-\alpha)\beta & \cdots\cdots③ \\ |\omega|=\dfrac{1}{2}|\alpha| & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

③を④へ代入して

$$④ \iff |\alpha+(z-\alpha)\beta|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$\iff \left|z-\frac{\alpha(\beta-1)}{\beta}\right|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

よって，点 z の全体は，

中心 $\dfrac{\alpha(\beta-1)}{\beta}=\alpha(1-\beta^{-1})$

$=\alpha[1-\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}]$

$=\boldsymbol{\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)}$

半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ の円

(3)　(2)で求めた中心の実部 $\alpha(1-\cos\theta)$ の絶対値が半径 $\dfrac{1}{2}|\alpha|$ に等しくなればよいので

$$|\alpha(1-\cos\theta)|=\frac{1}{2}|\alpha|$$

$$\iff 1-\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{2}\quad(|\cos\theta|\leqq 1 \text{ より})$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

第３講　複素数の方程式と図形

3

［A］ k を実数とするとき，方程式 $x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点と見なす．

(1) z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ．

(2) z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ．

(3) 3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに θ だけ回転して得られる 3 点を ω_1，ω_2，ω_3 とする．ω_1，ω_2，ω_3 およびそれらと共役な点 $\overline{\omega}_1$，$\overline{\omega}_2$，$\overline{\omega}_3$ とが原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ．

［B］ 複素数平面上の点 z を考える．

(1) 実数 a，c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき

$$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$$

を満たす点 z は $a\neq0$ のとき，どのような図形を描くか，ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す．

(2) 0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p，q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか．

【答】 ［A］ (1) $k=0,\ 1$　(2) $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

(3) $\begin{cases} k=\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \theta=\dfrac{\pi}{2} \\ k=-\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$

［B］ (1) 中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円

(2) d が実数のとき，点 z は p，q を通る直線，d が虚数のとき，点 z は中心 $\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$，半径 $\left|\dfrac{d(p-q)}{d-\overline{d}}\right|$ の円

【解説】

［A］ (1) 与式の左辺を因数分解すると，

$$(x-1)(x^2-2kx+4k^2)=0$$

となるので，$w=1+\sqrt{3}\,i$ とおくと，この 3 次方程式の 3 解は

$$x=1,\ kw,\ k\overline{w}$$

と表せる．ここで $|w|=2$ であることに注意すると，この 3 解が一直線上にあるときには，kw と $k\overline{w}$ は共役であるから

$$「\frac{kw+k\overline{w}}{2}=1」\text{または}「kw=k\overline{w}」$$

のときなので $|w|=2$ より

$$k=1 \text{ または } k=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{k=0,\ 1}$$

(2)　kw や $k\overline{w}$ において直角はありえないので

$$\frac{kw-1}{k\overline{w}-1}=\pm i \iff kw-1=\pm k\overline{w}i\mp i$$

$$\therefore\ k=\frac{1\pm i}{w\pm\overline{w}i}\ (\text{複号同順})$$

$$=\boldsymbol{\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}}$$

(3)　いずれの場合も，$|z_1|=|z_2|=|z_3|$ となる必要があるので

$$|kw|=|k\overline{w}|=1 \qquad \therefore\ k=\pm\frac{1}{2}$$

(Ⅰ)　$k=\dfrac{1}{2}$ のとき z_1，z_2，z_3 は 1，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となるので，そのとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ であれば題意を満たす．

(Ⅱ)　$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき z_1，z_2，z_3 は 1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ となるので，そのとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ であれば題意を満たす．

(Ⅰ)(Ⅱ)より　$(k,\ \theta)$ の組は

$$\boldsymbol{(k,\ \theta)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{6}\pi\right)}$$

［B］(1)

$$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$$

$$\iff z\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}z+\frac{b}{a}\bar{z}+\frac{c}{a}=0$$

$$\iff \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}\right)-\frac{|b|^2}{a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\iff \left|z+\frac{b}{a}\right|^2=\frac{|b|^2-ac}{a^2}$$

$$\therefore \left|z+\frac{b}{a}\right|=\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$$

よって点 z は**中心** $\boldsymbol{-\frac{b}{a}}$，**半径** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}}$ **の円**を描く．

(2)

$$d(z-p)(\bar{z}-\bar{q})=\bar{d}(z-q)(\bar{z}-\bar{p}) \quad \cdots\cdots ①$$

(Ⅰ) d が実数のとき，$d=\bar{d}$ より，$z\neq q$ のとき

$$① \iff (z-p)(\bar{z}-\bar{q})=(z-q)(\bar{z}-\bar{p})$$

$$\iff \frac{z-p}{z-q}=\overline{\left(\frac{z-p}{z-q}\right)}$$

より $\frac{z-p}{z-q}$ は実数．このことと，①は $z=q$ を満たすことより，$\boldsymbol{d}$ **が実数のとき**，点 z は $\boldsymbol{p}$**，**$\boldsymbol{q}$ **を通る直線**を描く．

(Ⅱ) d が虚数のとき，$d\neq\bar{d}$ より $d-\bar{d}\neq 0$ なので

$$① \iff (d-\bar{d})|z|^2+(\bar{d}\bar{p}-d\bar{q})z+(\bar{d}q-dp)\bar{z}+(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)=0$$

$$\iff |z|^2+\frac{\bar{d}\bar{p}-d\bar{q}}{d-\bar{d}}z+\frac{\bar{d}q-dp}{d-\bar{d}}\bar{z}+\frac{dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q}{d-\bar{d}}=0$$

となるが，$b=\frac{\bar{d}q-dp}{d-\bar{d}}$，$c=\frac{dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q}{d-\bar{d}}$ とおくと，$\bar{b}=\frac{\bar{d}\bar{p}-d\bar{q}}{d-\bar{d}}$，$\bar{c}=c$ となることより，$a=1$ とすることで(1)を用いることができる．

このとき，$-\frac{b}{a}=\frac{dp-\bar{d}q}{d-\bar{d}}$ であることと

$$\frac{|b|^2-ac}{|a|^2}=\frac{\bar{d}q-dp}{d-\bar{d}}\times\frac{\bar{d}\bar{p}-d\bar{q}}{d-\bar{d}}-\frac{dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q}{d-\bar{d}}$$

$$=\frac{(\bar{d}q-dp)(d\bar{q}-\bar{d}\bar{p})+(d-\bar{d})(dp\bar{q}-\bar{d}\bar{p}q)}{|d-\bar{d}|^2}$$

$$=\frac{|d|^2(|p|^2+|q|^2-p\bar{q}-\bar{p}q)}{|d-\bar{d}|^2}$$

$$=\frac{|d|^2\,|p-q|^2}{|d-\bar{d}|^2}$$

より，$\boldsymbol{d}$ **が虚数のとき**，点 z は**中心** $\boldsymbol{\frac{dp-\bar{d}q}{d-\bar{d}}}$，**半径** $\boldsymbol{\left|\frac{d(p-q)}{d-\bar{d}}\right|}$ **の円**を描く．

第４講　ド・モアブルの定理

4

［A］ α を 0 でない複素数とする．$\beta^2=\alpha$ となるような複素数 β がちょうど 2 個存在することを示せ．

［B］ 複素数 α は $|\alpha|=1$ を満たしている．このとき，$|\alpha^m+\alpha^{-m}|>1$ となる自然数 m が存在することを示せ．

【答】 略

【解説】

［A］ $\alpha\neq 0$ より $r>0$，$0°\leqq\theta<360°$ を満たす r と θ を用いて

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

と表すことができる．ここで

$$\beta=a(\cos\phi+i\sin\phi)\ (a>0,\ 0°\leqq\phi<360°)$$

とおくと，

$$\beta^2=a^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)$$

となるが，

$$\begin{cases} a=\sqrt{r} \\ \phi=\dfrac{1}{2}\theta,\ \dfrac{1}{2}\theta+180° \end{cases}$$

ととれば $\beta^2=\alpha$ とできる．つまり

$$\beta=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

よって　$\beta^2=\alpha$ となる β はちょうど 2 個存在する．

［B］ $|\alpha|=1$ より $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける．このとき

$$\alpha^{m}=\cos m\theta+i\sin m\theta$$
$$\alpha^{-m}=\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)$$
$$=\cos m\theta-i\sin m\theta$$

より

$$|\alpha^{m}+\alpha^{-m}|=|2\cos m\theta|=2|\cos m\theta|$$

となる．ここですべての自然数 m に関して $|\alpha^{m}+\alpha^{-m}|\leqq 1$ と仮定する．

ここで，ある自然数 k について $|\alpha^{k}+\alpha^{-k}|<1 \iff |\cos k\theta|<\dfrac{1}{2}$

とすると，

$$\cos 2k\theta=2\cos^{2}k\theta-1$$
$$=2|\cos k\theta|^{2}-1<-\frac{1}{2}$$

となり $|\alpha^{m}+\alpha^{-m}|=2|\cos m\theta|\leqq 1$ に矛盾．

また，ある自然数 k について $|\alpha^{k}+\alpha^{-k}|=1 \iff |\cos k\theta|=\dfrac{1}{2}$

が成り立つとすると

$$|\cos 3k\theta|=|4\cos^{3}k\theta-3\cos k\theta|$$
$$=\left|4\left(\pm\frac{1}{2}\right)^{3}-3\left(\pm\frac{1}{2}\right)\right| \quad （複号同順）$$
$$=1$$

つまり $|\alpha^{3k}+\alpha^{-3k}|=2$ となるので，$|\alpha^{m}+\alpha^{-m}|\leqq 1$ に矛盾．

以上より　$|\alpha^{m}+\alpha^{-m}|>1$ を満たす自然数 m は存在する．

第5講　2次曲線

5

［A］ 円 C_1：$x^2+(y-1)^2=1$ と楕円 C_2：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．

(1) C_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を固定し，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を b で表せ．ただし，O は原点とする．

(2) P を C_1 上，Q を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

［B］ 双曲線 C：$9x^2-y^2=9$ について，次の(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1) この双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ．

(2) 直線 l：$y=mx+n$ と双曲線 C が異なる2つの共有点をもつための条件を m，n の式で表せ．

(3) 直線 l と双曲線 C の共有点を P，Q，直線 l と双曲線 C の2本の漸近線との共有点を R，S とするとき PR＝QS が成立することを証明せよ．

【答】 ［A］ (1) $\sqrt{8b-3b^2}$ (2) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

［B］ (1) 焦点 $(\pm\sqrt{10},\ 0)$，漸近線 $y=\pm 3x$ (2) $m\neq\pm 3$ かつ $m^2-n^2<9$ (3) 略

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)=(2\cos\beta,\ \sin\beta)\quad(0\leqq\beta<2\pi)\end{cases}$$

と表せる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=2a\cos\beta+b\sin\beta\\&=\sqrt{4a^2+b^2}\cos(\beta+\theta)\end{aligned}$$

となる θ が存在するので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\sqrt{4a^2+b^2}$ であるが，$a^2+(b-1)^2=1$ より $a^2=2b-b^2$ となるので求める最大値は

$$\sqrt{4a^2+b^2}=\boldsymbol{\sqrt{8b-3b^2}}$$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ は C_1 上の点より

$$0\leqq b\leqq 2$$

(1)より $\sqrt{8b-3b^2}=\sqrt{-3\left(b-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値は

$$\sqrt{\frac{16}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

［B］ (1) $\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ より焦点は

$$\boldsymbol{(\pm\sqrt{10},\ 0)}$$

漸近線は

$$9x^2-y^2=0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{y=\pm 3x}$$

(2) C と l を連立すると

$$9x^2-(mx+n)^2=9$$

$$\therefore\quad (9-m^2)x^2-2mnx-(9+n^2)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

この x に関する２次方程式が異なる２つの実数解をもつので

$$9-m^2\neq 0 \text{ かつ } m^2n^2+(9-m^2)(9+n^2)>0$$

$$\iff \quad \boldsymbol{m\neq\pm 3 \text{ かつ } m^2-n^2<9}$$

(3) $y=mx+n$ と $y=\pm 3x$ を連立すると $m\neq\pm 3$ のとき

$$mx+n=\pm 3x \iff x=\frac{-n}{m-(\pm 3)}$$

を得る．ここで①の２つの解を α，β とおくと

$$\mathrm{PR}=\mathrm{QS} \iff \left|\frac{-n}{m-3}-\alpha\right|=\left|\frac{-n}{m+3}-\beta\right|$$

より，これを示す．

$$\left|\frac{-n}{m-3}-\alpha\right|^2-\left|\frac{-n}{m+3}-\beta\right|^2$$

$$=\left\{\frac{n^2}{(m-3)^2}+\frac{2\alpha n}{m-3}+\alpha^2\right\}-\left\{\frac{n^2}{(m+3)^2}+\frac{2\beta n}{m+3}+\beta^2\right\}$$

$$=\frac{12mn^2}{(m-3)^2(m+3)^2}+\frac{2n\{(m+3)\alpha-(m-3)\beta\}}{(m-3)(m+3)}+\alpha^2-\beta^2$$

$$=\frac{12mn^2}{(m-3)^2(m+3)^2}+\frac{6n(\alpha+\beta)}{(m-3)(m+3)}+(\alpha-\beta)\left\{\frac{2mn}{(m-3)(m+3)}+(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=0 \quad \left(\alpha+\beta=\frac{-2mn}{(m-3)(m+3)} \text{ より}\right)$$

第６講　媒介変数で表示された曲線

6

［A］ $(x,\ y)=(\cos^3 t,\ \sin^3 t)$ $(0\leqq t<2\pi)$ で表される曲線を図示せよ.

［B］ $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2}\cos t,\ \sin t+\dfrac{1}{3}\cos 2t\right)$ $(0\leqq t<2\pi)$ で表される曲線を図示せよ.

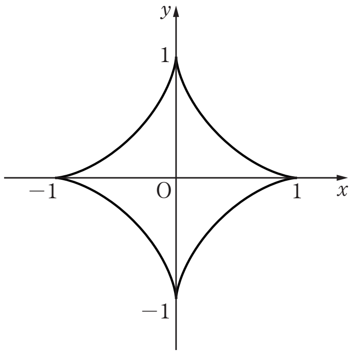
【答】 略

【解説】

［A］ $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(-3\sin t\cos^2 t,\ 3\sin^2 t\cos t)$ であることと $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\tan t$ より増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
x'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{dy}{dx}$	(0)	$-$	$-\infty/\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty/\infty$	$+$	(0)
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	↖	$(0,\ 1)$	↙	$(-1,\ 0)$	↘	$(0,\ -1)$	↗	$((1,\ 0))$

となるので，グラフは以下の通り.



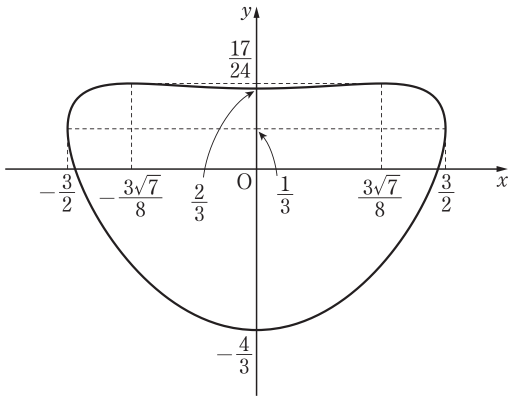
［B］ $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(-\dfrac{3}{2}\sin t,\ \dfrac{1}{3}\cos t(3-4\sin t)\right)$ であることと

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2\cos t(4\sin t-3)}{9\sin t}$ より増減は

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
x'	(0)	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	(0)
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x,\ y)$	$\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\right)$	↖	$\left(\frac{3\sqrt{7}}{8},\ \frac{17}{24}\right)$	↙	$\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$	↖	$\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8},\ \frac{17}{24}\right)$	↙	$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\right)$	↘	$\left(0,\ -\frac{4}{3}\right)$	↗	$\left(\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{3}\right)\right)$

となる．ただし，α，β を $\sin\alpha=\sin\beta=\dfrac{3}{4}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ を満たす実数とする．

よってグラフは以下の通り．



第７講　極限の基本

7

［A］　次の極限を求めよ．ただし，n は自然数，x は実数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}$　$(0<a<1)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

［B］　等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=1$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ．

【答】　［A］　(1) $\log2$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{1}{e}$　(4) $-\dfrac{1}{2}$　(5) 0　(6) $\dfrac{1}{1-a}$　(7) 0　(8) 0　(9) 1

(10) 1　(11) 3　(12) $\sqrt{3}$　(13) $\dfrac{1}{2}$

［B］　$a=-1$，$b=\dfrac{\pi}{2}$

【解説】

［A］　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{(\log2)x}-1}{(\log2)x}\cdot\log2=\boldsymbol{\log2}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x+x^2}+1}\cdot\frac{1+x}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1}=e^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

(5) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{t\to0}\frac{1-\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{1+\cos t}=\boldsymbol{0}$$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\log\frac{x-a}{1-a}=\lim_{x\to1}\frac{\log\left(1+\frac{x-1}{1-a}\right)}{\frac{x-1}{1-a}}\cdot\frac{1}{1-a}=\boldsymbol{\frac{1}{1-a}}$

(7) $\displaystyle\left|\frac{1}{x^2}\cos\pi x\right|\leqq\frac{1}{x^2}\to0\ (x\to\infty)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cos\pi x=\boldsymbol{0}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x+1}=\boldsymbol{0}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-3}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\boldsymbol{1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1+0}(2-1)=1,\ \lim_{x\to1-0}([2x]-[x])=\lim_{x\to1-0}(1-0)=1$ より

$\displaystyle\lim_{x\to1}([2x]-[x])=\boldsymbol{1}$

(11) $3x-1<[3x]\leqq3x$ より $\displaystyle 3-\frac{1}{x}<\frac{[3x]}{x}\leqq3$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ より　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=\boldsymbol{3}$

(12) $\displaystyle\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}=3^{\sqrt{x^2+x+2}-x}$ であり $\displaystyle\sqrt{x^2+x+2}-x=\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}\to\frac{1}{2}\ (x\to\infty)$

なので　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^{\sqrt{x^2+x+2}}}{3^x}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

［B］ $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$

$$\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{a\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)+b}{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{at+\left(\dfrac{a}{2}\pi+b\right)}{-\sin t}$$

ここで $\dfrac{a}{2}\pi+b\neq 0$ とすると極限は発散するので不適.

$$\text{ゆえに}\quad \frac{a}{2}\pi+b=0 \qquad \therefore\quad b=-\frac{a}{2}\pi$$

このとき

$$\frac{at}{-\sin t}=-a\cdot\frac{t}{\sin t}\to -a\ \ (t\to 0) \qquad \therefore\quad -a=1$$

よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=\dfrac{\pi}{2}}$

第８講　漸化式と極限

8

［A］ p を 0 でない実数とする．数列 a_1，a_2，…… を次のように定義する．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+p^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $|p|=1$ のとき，a_n を求めよ．

(2) $|p|\neq1$ のとき，a_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ．

［B］ 2次方程式 $x^2-5x-5=0$ の2つの解を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とし，数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を $a_n=\alpha^n+\beta^n$ により定める．このとき，$a_1=$□，$a_2=$□，$a_3=$□であり，$\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+2}=\square\, a_{n+1}+\square\, a_n$$

を満たす．実数 t に対し，t を超えない最大の整数を記号 $[t]$ で表し，$\langle t\rangle=t-[t]$ とおく．たとえば，$\left\langle-\dfrac{1}{3}\right\rangle=\dfrac{\square}{\square}$ である．2つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$p_n=\langle\alpha^n\rangle$$
$$q_n=\langle\beta^n\rangle$$

により定める．$[\alpha]=$□，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=$□であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=$□，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_{2n}=$□となる．すべての n について $\langle a_n\rangle=$□である．したがって，次の極限値が得られる．

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\square$$
$$\lim_{n\to\infty}q_{2n}=\square$$

【答】 ［A］ (1) $a_n=\begin{cases} n & (p=1)\\ (-1)^{n+1}n & (p=-1)\end{cases}$　(2) $a_n=\dfrac{p}{p^2-1}(p^n-p^{-n})$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases} p & (|p|\geqq1)\\ \dfrac{1}{p} & (|p|<1)\end{cases}$

［B］ 順に，5，35，200，5，5，2，3，−1，0，1，0，0，0，1

【解説】

［A］ (1)　$p=1$ のとき

$$a_{n+1}=a_n+1$$

よって　$\{a_n\}$ は初項1，公差1の等差数列となるので

$$a_n=1+(n-1)\times1=\boldsymbol{n}$$

$p=-1$ のとき

$$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{-n}$$

$$\iff \quad \frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}}=\frac{a_n}{(-1)^n}-1$$

よって $\left\{\dfrac{a_n}{(-1)^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{a_1}{-1}=-1$，公差 -1 の等差数列となるので

$$\frac{a_n}{(-1)^n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n$$

$$\therefore \quad a_n=\boldsymbol{(-1)^{n+1}n}$$

(2)

$$a_{n+1}=pa_n+p^{-n}$$

$$\iff \quad \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{1}{p^3}\left(\frac{1}{p^2}\right)^{n-1}$$

よって $\left\{\dfrac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列は $\dfrac{1}{p^3}\left(\dfrac{1}{p^2}\right)^{n-1}$ となるので

$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{p^n}=\frac{a_1}{p^1}+\frac{\dfrac{1}{p^3}\left\{\left(\dfrac{1}{p^2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\dfrac{1}{p^2}-1}$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{1}{p(1-p^2)}\left(\frac{1}{p^{2n-2}}-1\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a_n=\frac{p}{p^2-1}(p^n-p^{-n})} \quad \text{（これは } n=1 \text{ のときにも成り立つ）}$$

(3)　$p=1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}\to 1 \ (n\to\infty)$$

$p=-1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)}{(-1)^{n+1}n}$$

$$=-\frac{n+1}{n}\to -1 \ (n\to\infty)$$

$|p|\neq 1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^{n+1}-p^{-(n+1)}}{p^n-p^{-n}}$$

であるから

$|p|>1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p-\dfrac{1}{p^{2n+1}}}{1-\dfrac{1}{p^{2n}}}\to p \ (n\to\infty)$$

$|p|<1$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{p^{2n+1}-p^{-1}}{p^{2n}-1}\to \frac{1}{p} \ (n\to\infty)$$

以上をまとめて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\boldsymbol{a}_{n+1}}{\boldsymbol{a}_n}=\begin{cases}\boldsymbol{p} & (|\boldsymbol{p}|\geqq 1)\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}} & (|\boldsymbol{p}|<1)\end{cases}$$

［B］ 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=5,\qquad \alpha\beta=-5$$

となる.

$$a_1=\alpha+\beta=\mathbf{5}$$

$$a_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\mathbf{35}$$

$$a_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)=\mathbf{200}$$

また

$$\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}=(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})(\alpha+\beta)-(\alpha^n+\beta^n)\alpha\beta$$

より

$$a_{n+2}=\mathbf{5}a_{n+1}+\mathbf{5}a_n$$

$[t]$ は t の整数部分なので，$\langle t\rangle=t-[t]$ は t の小数部分を表す．よって

$$\left\langle -\frac{1}{3}\right\rangle=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

である.

$f(x)=x^2-5x-5$ とおくと

$$f(-1)=1>0,\qquad f(0)=-5<0$$

より

$$-1<\alpha<0$$

よって

$$[\alpha]=-\mathbf{1},\qquad \lim_{n\to\infty}\alpha^n=\mathbf{0}$$

であり，$\alpha^{2n+1}<0$ より

$$\lim_{n\to\infty}p_{2n+1}=\mathbf{1}$$

$\alpha^{2n}>0$ より

$$\lim_{n\to\infty}p_{2n}=\mathbf{0}$$

また帰納的に a_n は自然数であるから

$$\begin{aligned}\langle a_n\rangle=\mathbf{0}\quad&\Longleftrightarrow\quad \langle\alpha^n+\beta^n\rangle=0\\ &\Longleftrightarrow\quad \langle\alpha^n\rangle+\langle\beta^n\rangle=1\\ &\therefore\quad \langle\beta^n\rangle=1-\langle\alpha^n\rangle\end{aligned}$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty}q_{2n+1}=\mathbf{0},\qquad \lim_{n\to\infty}q_{2n}=\mathbf{1}$$

第９講　ちょっと困った極限

9

［A］　関数 $f(x)=|x^2-2x|$ に対して，数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，次の問いに答えよ.

(1)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ との共有点の座標を求めよ.

(2)　$0<a_1<1$ ならば，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ で与えられることを示せ.

(3)　$1\leqq a_1\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき，グラフを利用して極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.

［B］　n を自然数とする．次の各問いに答えよ.

(1)　自然数 k は $2\leqq k\leqq n$ を満たすとする．9^k を 10 進法で表したときの桁数は，9^{k-1} の桁数と等しいか，または 1 だけ大きいことを示せ.

(2)　9^{k-1} と 9^k の桁数が等しいような $2\leqq k\leqq n$ の範囲の自然数 k の個数を a_n とする．9^n の桁数を n と a_n を用いて表せ.

(3)　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$ を求めよ.

【答】　［A］　(1) (0, 0), (1, 1), (3, 3)　(2) 略

(3)
$$\begin{cases} a_1=2,\ a_1=1+\sqrt{3} \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty}a_n=0 \\ 1\leqq a_1<2,\ 2<a_1<1+\sqrt{3} \text{ のとき} & \lim_{n\to\infty}a_n=1 \end{cases}$$

［B］　(1) 略　(2) $n-a_n$　(3) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=1-2\log_{10}3$

【解説】

［A］　(1)

$$|x^2-2x|=x$$

$$\iff \begin{cases} x^2-2x=x \quad \text{かつ} \quad x^2-2x\geqq 0 \\ -x^2+2x=x \quad \text{かつ} \quad x^2-2x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0,\ 3 \quad \text{かつ} \quad x\leqq 0,\ x\geqq 2 \\ x=0,\ 1 \quad \text{かつ} \quad 0<x<2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad x=0,\ 1,\ 3$$

よって共有点の座標は

$$\mathbf{(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (3,\ 3)}$$

(2)　$0<a_1<1$ のとき

$$1-(1-a_1)^{2^0}=a_1$$

ここで $n\geqq 1$ のとき $a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}}$ を仮定すると，

$$0<1-a_1<1 \qquad \therefore\quad 0<1-(1-a_1)^{2^{n-1}}<1$$

$$\therefore\quad 0<a_n<1$$

このとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) \\ &= -a_n{}^2+2a_n \\ &= -a_n(a_n-2) \\ &= -\{1-(1-a_1)^{2^{n-1}}\}\{-1-(1-a_1)^{2^{n-1}}\} \\ &= 1^2-\{(1-a_1)^{2^{n-1}}\}^2 \\ &= 1-(1-a_1)^{2^n} \end{aligned}$$

よって帰納的に

$$a_n=1-(1-a_1)^{2^{n-1}} \quad (n\geqq 1)$$

が示された.

(3)　グラフより

$a_1=2,\ 1+\sqrt{3}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0$$

$1\leqq a_1<2,\ 2<a_1<1+\sqrt{3}$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

［B］(1)　9^{k-1} の桁数を自然数 l で表すと

$$10^{l-1}\leqq 9^{k-1}<10^l \qquad \therefore\quad 9\cdot 10^{l-1}\leqq 9^k<9\cdot 10^l$$

となるが,

$$9\cdot 10^{l-1}<10^l<9\cdot 10^l$$

であることより

$$10^{l-1}\leqq 9^k<10^l \text{ または } 10^l\leqq 9^k<10^{l+1}$$

のいずれかは成立する．よって 9^k は l 桁か $(l+1)$ 桁である.

(2)　$9^2=81>10$ より $9^{k-1},\ 9^k,\ 9^{k+1}$ の 3 つの数字の桁数が等しくなる k は存在しない．よって $9^1,\ 9^2,\ \cdots,\ 9^n$ の n 個の数のうち桁数が重複しているのは a_n 個であるので 9^n の桁数は

$$\boldsymbol{n-a_n}$$

(3)　9^n の桁数が $n-a_n$ より

$$\begin{aligned} & 10^{n-a_n-1}\leqq 9^n<10^{n-a_n} \\ \iff\ & n-a_n-1\leqq n\log_{10}9<n-a_n \\ \iff\ & 1-\log_{10}9-\frac{1}{n}\leqq \frac{a_n}{n}<1-\log_{10}9 \end{aligned}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\log_{10}9-\frac{1}{n}\right)=1-\log_{10}9=1-2\log_{10}3$$

より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1-2\log_{10}3$$

第 10 講　無限級数

10

［A］　$-1<x<1$ とする．次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$$

［B］　正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ があり，曲線 $y=px^p$ $(p>1)$ 上の点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k と x 軸との交点の x 座標が a_{k+1} となっている．また，$a_1=1$ である．

(1)　a_{k+1} と a_k の間の関係式を導き，a_k を求めよ．

(2)　接線 l_k と直線 $x=a_k$ および x 軸で囲まれる三角形の面積を A_k とし，曲線 $y=px^p$ と接線 l_k および直線 $x=a_{k+1}$ で囲まれる図形の面積を B_k とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k$ を求めよ．

【答】　［A］　$\dfrac{x}{(1-x)^2}$

［B］(1) $a_k=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{k-1}$　$(k\geqq 1)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k=\frac{p}{p+1}-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$

【解説】

［A］　$\displaystyle S=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^k$ とおくと

$$\begin{aligned}xS&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n+1-k)}{n}x^{k+1}\\&=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)(n+2-k)}{n}x^k\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&(1-x)S\\&=\frac{1\times n}{n}x^1+\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{k(n+1-k)}{n}-\frac{(k-1)(n+2-k)}{n}\right\}x^k-\frac{n\times 1}{n}x^{n+1}\\&=x+\sum_{k=2}^{n}\frac{-2k+n+2}{n}x^k-x^{n+1}\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle T=\sum_{k=2}^{n}\frac{-2k+n+2}{n}x^k$ とおくと

$(1-x)T$

$=\dfrac{n-2}{n}x^2+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left\{\dfrac{-2k+n+2}{n}-\dfrac{-2(k-1)+n+2}{n}\right\}x^k-\dfrac{-2n+n+2}{n}x^{n+1}$

$=\dfrac{n-2}{n}x^2+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\dfrac{-2}{n}x^k-\dfrac{-n+2}{n}x^{n+1}$

$=\left(1-\dfrac{2}{n}\right)(x^2+x^{n+1})-\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{x^3(1-x^{n-2})}{1-x}$　$(-1<x<1$ より$)$

$\to x^2$ $(n\to\infty)$

よって

$$\lim_{n\to\infty}T=\frac{x^2}{1-x}$$

このとき

$$(1-x)S=x+T-x^{n+1}\to x+\frac{x^2}{1-x}\ (n\to\infty)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S=\frac{1}{1-x}\left(x+\frac{x^2}{1-x}\right)=\boldsymbol{\frac{x}{(1-x)^2}}$$

［B］(1)　$y'=p^2x^{p-1}$ より点 $(a_k,\ pa_k{}^p)$ における接線 l_k の方程式は

$$y=p^2a_k{}^{p-1}(x-a_k)+pa_k{}^p$$

$$\therefore\ y=p^2a_k{}^{p-1}x+p(1-p)a_k{}^p$$

となり，この直線が点 $(a_{k+1},\ 0)$ を通るので

$$0=p^2a_k{}^{p-1}a_{k+1}+p(1-p)a_k{}^p$$

$$\iff p^2a_k{}^{p-1}a_{k+1}=p(p-1)a_k{}^p$$

$$\iff a_{k+1}=\left(1-\frac{1}{p}\right)a_k\quad(a_k>0,\ p>1\text{ より})$$

ゆえに $\{a_n\}$ は初項 1，公比 $1-\dfrac{1}{p}$ の等比数列であるので

$$\boldsymbol{a_k=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{k-1}}$$

(2)　$1-\dfrac{1}{p}=\alpha$ とおくと，

$$A_k=(a_k-a_{k+1})\cdot pa_k{}^p\cdot\frac{1}{2}$$

$$=(\alpha^{k-1}-\alpha^k)\cdot p(\alpha^{k-1})^p\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\alpha)p\cdot(\alpha^{p+1})^{k-1}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p+1}\right\}^{k-1}$$

となり，$\{A_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^{p+1}$ の等比数列となる．

ここで $p>1$ より $0<\dfrac{1}{p}<1$

$$\therefore \quad 0<1-\frac{1}{p}<1$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p+1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}}$$

また　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}a_k=0$ より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}B_k=\int_0^1 px^p\,dx-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k$$

$$=\left[\frac{p}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{p}{p+1}-\frac{p^{p+1}}{2\{p^{p+1}-(p-1)^{p+1}\}}}$$

第11講　微分の基本

11

［A］ (5)は $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ を，それ以外は $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．ただし，a は実数の定数，n は自然数とする．

(1)　$y=(3x-2)^2(x^2+x+1)^3$

(2)　$y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(3)　$y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$

(4)　$y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^2}}$

(5)　$y=x^m$　(m は有理数)

(6)　$y=x^{\cos x}$　$(x>0)$

(7)　$x=\cos y$　$(0\leqq y\leqq\pi)$

(8)　$x=\dfrac{1}{1+t^2}$，$y=\dfrac{t}{1+t^2}$　$(t>0)$

(9)　$\sqrt{x}+\sqrt{y}=xy$

［B］ 商の微分の公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を示せ．

【答】［A］ (1) $3x(3x-2)(8x+1)(x^2+x+1)^2$　(2) $\dfrac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(4) $-\dfrac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x-1)^5}}$　(5) $m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$

(6) $x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\log x)$　(7) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(8) $\dfrac{t^2-1}{2t}$　(9) $\dfrac{\sqrt{y}(1-2y\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2x\sqrt{y}-1)}$

［B］ 略

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{aligned}y'&=2(3x-2)\cdot(3x-2)'\cdot(x^2+x+1)^3+(3x-2)^2\cdot 3(x^2+x+1)^2\cdot(x^2+x+1)'\\&=6(3x-2)(x^2+x+1)^3+3(3x-2)^2(x^2+x+1)^2(2x+1)\\&=3(3x-2)(x^2+x+1)^2\{2(x^2+x+1)+(3x-2)(2x+1)\}\\&=\boldsymbol{3x(3x-2)(8x+1)(x^2+x+1)^2}\end{aligned}$$

(2)

$$y'=\frac{(1+\sqrt{x})'}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\boldsymbol{\frac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}}$$

(3)

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left\{1+\frac{(x^2+a)'}{2\sqrt{x^2+a}}\right\}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$$

(4)　$y=(x^2+1)^{\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ より

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+1)'\cdot(x-1)^{-\frac{2}{3}}+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(x-1)^{-\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(x-1)^{-\frac{5}{3}}\{x(x-1)-(x^2+1)\}=\boldsymbol{-\frac{2(x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x-1)^5}}}$$

(5)　$y'=mx^{m-1}$，$y''=m(m-1)x^{m-2}$，$\cdots$ より帰納的に

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\boldsymbol{m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}}$$

(6)　$\log y=\log x^{\cos x}=\cos x\log x$ より，$\log y=\cos x\log x$ の両辺を x で微分すると

$\dfrac{y'}{y}=-\sin x\log x+\cos x\cdot\dfrac{1}{x}$ となるので

$$y'=\boldsymbol{x^{\cos x-1}(\cos x-x\sin x\log x)}$$

(7)　$x=\cos y$ の両辺を y で微分すると $\dfrac{dx}{dy}=-\sin y$ となるが，

$-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(8)　$x=(1+t^2)^{-1}$ より $\dfrac{dx}{dt}=-(1+t^2)^{-2}\cdot(1+t^2)'=-\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$，$y=t(1+t^2)^{-1}$ より

$\dfrac{dy}{dt}=1\cdot(1+t^2)^{-1}+t\cdot\{-(1+t^2)^{-2}\cdot(1+t^2)'\}=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{2t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ なので，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\boldsymbol{\frac{t^2-1}{2t}}$$

(9)　両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{y'}{2\sqrt{y}}=1\cdot y+xy'$ となるので，$\dfrac{dy}{dx}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{y}\,(1-2y\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}\,(2x\sqrt{y}-1)}}$

［B］

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

第 12 講　接線など

12

［A］ A, B を $AB\neq 0$ を満たす定数とする．２次曲線 C：$Ax^2+By^2=1$ 上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \beta)$ における接線の方程式は $A\alpha x+B\beta y=1$ となることを示せ.

［B］ 次の各問いに答えよ.

⑴ $\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{3\pi}{4}$ の a を適当にとって，$y=\sin^2 x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=\cos(x-a)$ のグラフが共有点で共通の接線をもつようにする．このとき $\sin a$ の値を求めよ.

⑵ xy 平面上の２つの曲線

$$\begin{cases} C_1：y=-e^{-x} \\ C_2：y=e^{ax}\ （ただし，a>0） \end{cases}$$

のどちらにも接する直線を l とする．l が C_1 に接する点の x 座標を求めよ.

【答】 ［A］ 略

［B］ ⑴ $\sin a=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ 　⑵ $-1-\dfrac{\log a}{a+1}$

【解説】

［A］ $Ax^2+By^2=1$ の両辺を x で微分すると $2Ax+2By\dfrac{dy}{dx}=0$ となるが，これに $(x,\ y)=(\alpha,\ \beta)$ を代入すると $2A\alpha+2B\beta\dfrac{dy}{dx}=0 \Longleftrightarrow (A\alpha,\ B\beta)\cdot\left(1,\ \dfrac{dy}{dx}\right)=0$ より，接線の法線ベクトルが $(A\alpha,\ B\beta)$ であることがわかる.

よって点 A における接線の方程式は $A\alpha(x-\alpha)+B\beta(y-\beta)=0$

ゆえに $A\alpha x+B\beta y=1$

［B］ ⑴ $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=\cos(x-a)$ とおくと，

$$f'(x)=2\sin x\cos x,\qquad g'(x)=-\sin(x-a)$$

より，共有点の x 座標を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=\cos(\alpha-a) \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin(\alpha-a) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=\cos\alpha\cos a+\sin\alpha\sin a & \cdots\cdots ① \\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha\cos a+\cos\alpha\sin a & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①×$\sin\alpha$＋②×$\cos\alpha$ より，

$$\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\sin a$$

$$\therefore\quad \sin\alpha(2-\sin^2\alpha)=\sin a \quad \cdots\cdots ③$$

同様に，①×$\cos\alpha$－②×$\sin\alpha$ より，

$$-\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos a \quad \cdots\cdots ④$$

③^2＋④^2 より　$\sin^2 a+\cos^2 a=1$ を用いて

$$\sin^2\alpha(2-\sin^2\alpha)^2+\sin^4\alpha\cos^2\alpha=1$$

$\sin^2\alpha=t$ とおくと

$$t(2-t)^2+t^2(1-t)=1$$
$$\iff (3t-1)(t-1)=0$$

$0<t<1$ より $t=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって③より

$$\sin a=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

(2)　$f(x)=-e^{-x}$, $g(x)=e^{ax}$ とおくと $f'(x)=e^{-x}$, $g'(x)=ae^{ax}$ より l と C_1, C_2 との接点の x 座標をそれぞれ α, β とすると l は

$$y=e^{-\alpha}(x-\alpha)-e^{-\alpha}=e^{-\alpha}x-(\alpha+1)e^{-\alpha}$$
$$y=ae^{a\beta}(x-\beta)+e^{a\beta}=ae^{a\beta}x+(1-a\beta)e^{a\beta}$$

と表せるので

$$\begin{cases} e^{-\alpha}=ae^{a\beta} & \cdots\cdots① \\ -(\alpha+1)e^{-\alpha}=(1-a\beta)e^{a\beta} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

となる．①を②へ代入すると

$$② \iff -(\alpha+1)\cdot ae^{a\beta}=(1-a\beta)e^{a\beta}$$
$$\iff (1+a+a\alpha-a\beta)e^{a\beta}=0$$
$$\iff 1+a+a\alpha-a\beta=0$$
$$\therefore\ \beta=\alpha+1+\frac{1}{a}$$

このとき　$a>0$ より

$$① \iff e^{-\alpha}=ae^{a\left(\alpha+1+\frac{1}{a}\right)}$$
$$\iff e^{-\alpha}=ae^{a\alpha+a+1}$$
$$\iff -\alpha=\log a+(a\alpha+a+1)$$
$$\iff (a+1)\alpha=-(a+1+\log a)$$
$$\therefore\ \alpha=\boldsymbol{-1-\frac{\log a}{a+1}}$$

第 13 講　グラフの描き方（その１）

13

［A］ 次の関数に対し，$y=f(x)$ のグラフを描け.

(1) $f(x)=\dfrac{4x^2-8x+19}{x^2+1}$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^2-4x+3}$

［B］ $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$ とするとき，$y=f(x)$ の凹凸も調べてグラフを描け.

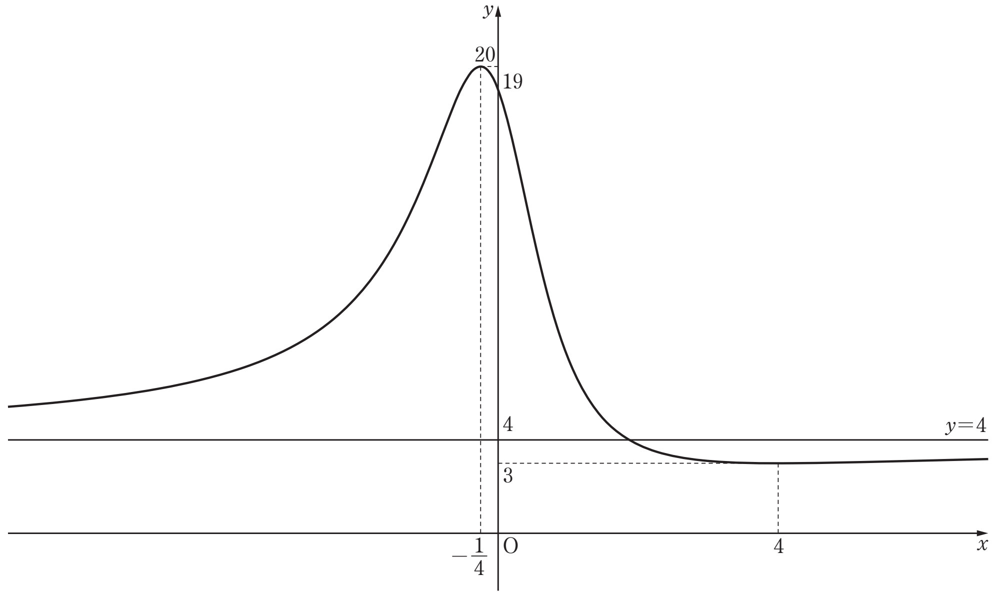
【答】 略

【解説】

［A］ (1) $f'(x)=\dfrac{2(4x+1)(x-4)}{(x^2+1)^2}$ より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{4}$	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↗	20	↘	3	↗	4

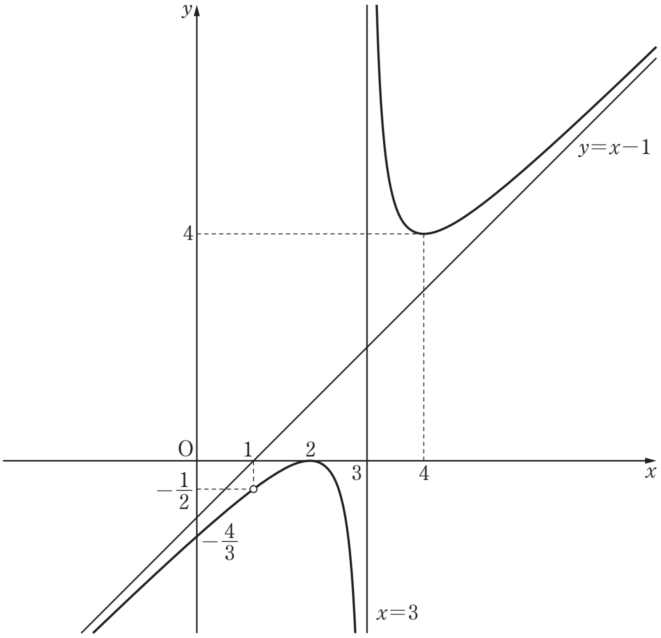
となるので，$y=f(x)$ のグラフは



(2)　$f'(x)=\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$ より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\times$	↗	0	↘	$-\infty/\infty$	↘	4	↗	∞

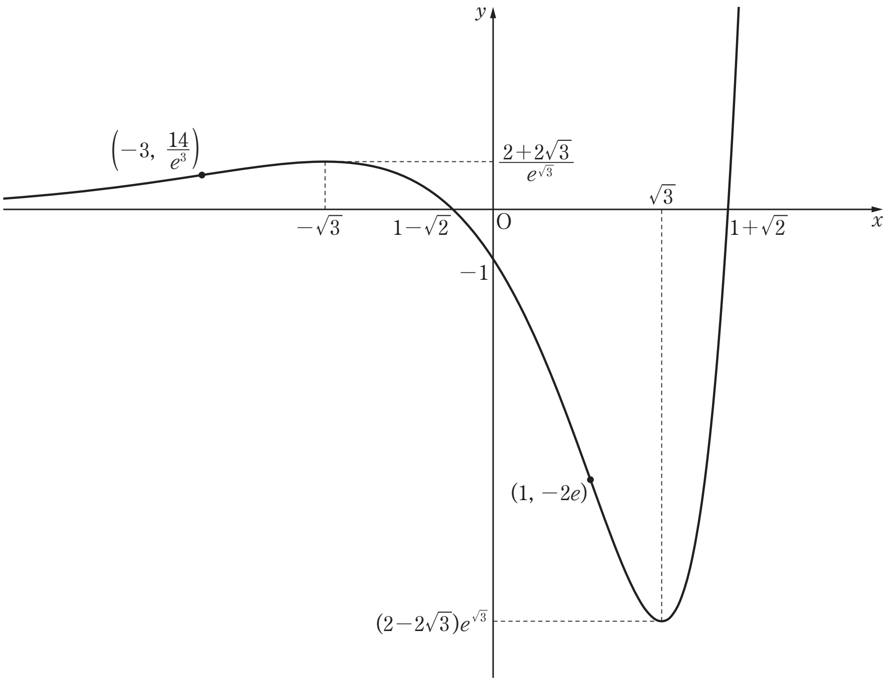
となるので，$y=f(x)$ のグラフは



［B］　$f'(x)=(x^2-3)e^x$，$f''(x)=(x+3)(x-1)e^x$ より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	⤴	$\dfrac{14}{e^3}$	↗	$\dfrac{2+2\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}}$	↘	$-2e$	↘	$(2-2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$	⤴	∞

となるので，$y=f(x)$ のグラフは



第 14 講　グラフの描き方（その２）

14

［A］　$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin x}$ とおくとき，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

［B］　次式で表される関数のグラフについて，次の問いに答えよ.

$$y=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}\qquad \text{ただし，}a\text{ は正の定数とする.}$$

(1)　$a<4$ では，y は極値をもたないことを示せ.

(2)　$a>4$ では，y は $1<x<\dfrac{a}{2}$ において極小値をとり，$\dfrac{a}{2}<x$ において極大値をとることを示せ.

(3)　x が正の値から 0 に近づくとき，y の値はどのように変化するか説明せよ．また，x が負の値から 0 に近づくときについても説明せよ.

(4)　以上の結果より，$a<4$，$a=4$，$a>4$ の各場合に対して，グラフの概形を描け.

【答】［A］　略

［B］ (1) 略　(2) 略　(3) $\begin{cases} x\to +0 \text{ のとき}\quad y<0 \text{ の側から } 0 \text{ に近づく.}\\ x\to -0 \text{ のとき}\quad -\infty \text{ に発散する.}\end{cases}$　(4) 略

【解説】

［A］　$f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin x}$ を x で微分すると，

$$f'(x)=\frac{1}{(1+\sin x)^2}\{(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x)(1+\sin x)-\sin^2 x\cos x\cdot\cos x\}$$

$$=\frac{\sin x}{1+\sin x}\{(2\cos^2 x-\sin^2 x)-\sin x(1-\sin x)\}$$

$$=\frac{\sin x(-2\sin^2 x-\sin x+2)}{1+\sin x}$$

$0<x<\pi$ における $f'(x)$ の符号は $-2\sin^2 x-\sin x+2$ の符号と一致するので

$-2\sin^2 x-\sin x+2=0$，つまり $\sin x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ かつ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす x を α とおくと，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	0	↗		↘		↗	0

となる．ここで $\sin\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より

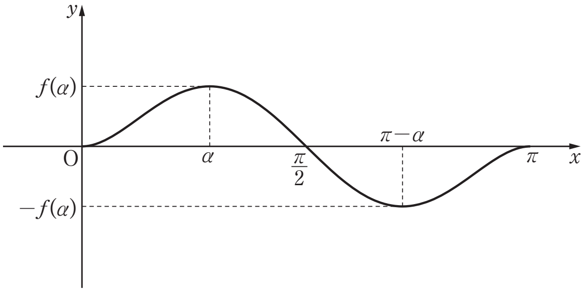
$$-2\sin^2\alpha-\sin\alpha+2=0 \iff 1-\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{8}}$$

となるので $f(x)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$
$$=\cdots=\frac{(9-\sqrt{17})\sqrt{\sqrt{17}-4}}{8}$$

よってグラフの概形は



［B］　$y=\dfrac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}$ より

$$y'=\frac{1}{(x-1)^2}\left\{e^{-\frac{a}{x}}\left(\frac{a}{x^2}\right)(x-1)-e^{-\frac{a}{x}}\cdot 1\right\}$$
$$=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^2(x-1)^2}(-x^2+ax-a)$$
$$=\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x^2(x-1)^2}\left\{-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{4}(a-4)\right\}$$

(1)　$a<4$ のとき

$$\frac{a}{4}(a-4)<0$$

よって $y'<0$ となるので極値は存在しない.

(2)　$f(x)=-x^2+ax-a$ とおくと

$$f(1)=-1<0$$
$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{4}(a-4)>0\quad(a>4\text{ より})$$
$$f(a)=-a<0$$

より $f(x)=0$ は $1<x<\dfrac{a}{2}$ と $x>\dfrac{a}{2}$ にそれぞれ 1 つずつ解をもつので，それぞれ α，β とおくと，$x>1$ での y の増減は

x	1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y		↘	極小	↗	極大	↘

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left(-\frac{a}{x}\right)=-\infty$ より　$\displaystyle\lim_{x\to+0}e^{-\frac{a}{x}}=0$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}=0$$

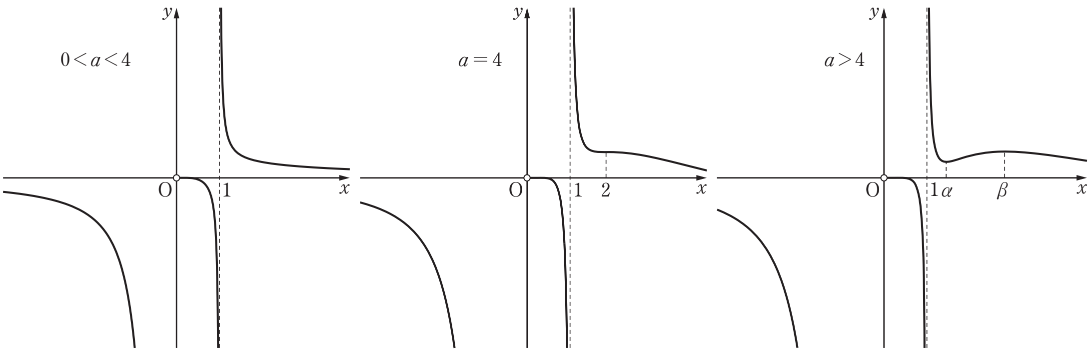
同様に $\displaystyle\lim_{x\to-0}\left(-\frac{a}{x}\right)=\infty$ より

$$\lim_{x\to-0}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x-1}=-\infty$$

(4)　$a=4$ のとき $x>1$ での y の増減は

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'		$-$	0	$-$
y		↘		↘

となるのでグラフの概形は下図.



第 15 講　最大・最小

15 ［A］ xy 平面上を速さ 1 で自由に動くことのできる点 P があって，直線 $y=\sqrt{3}x$ 上を動くときのみ速さ 2 で動くことができる．このとき，動点 P が原点 O を出発して，点 A$(2,\ \sqrt{3})$ に至るまでの最小時間を求めよ． ［B］ α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする．このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ．

【答】 ［A］ 2

［B］ $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

【解説】

［A］ $y=\sqrt{3}x$ 上を原点 O から t 秒間移動した点を Q とすると

$$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{3}t)$$

であり，A に至るまでの時間は

$$\begin{aligned} &t+\sqrt{(2-t)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}t)^2}\\ &=t+\sqrt{4t^2-10t+7} \end{aligned}$$

となるので，これを $f(t)$ とおく．

$$\begin{aligned} f'(t)&=1+\frac{4t-5}{\sqrt{4t^2-10t+7}}\\ &=\frac{\sqrt{4t^2-10t+7}+4t-5}{\sqrt{4t^2-10t+7}} \end{aligned}$$

(Ⅰ) $4t-5\geqq 0$ つまり $t\geqq\dfrac{5}{4}$ のとき $f'(t)>0$ となる．

(Ⅱ) $4t-5<0$ つまり $0<t<\dfrac{5}{4}$ のとき

$$f'(t)=\frac{-6(t-1)(2t-3)}{\sqrt{4t^2-10t+7}\{\sqrt{4t^2-10t+7}-(4t-5)\}}$$

よって $0<t<1$ のとき $f'(t)<0$，$1<t<\dfrac{5}{4}$ のとき $f'(t)>0$ となる．

(Ⅰ)(Ⅱ)より $f(t)$ の増減は

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘	最小	↗

となるので最小時間は

$$f(1)=1+\sqrt{1}=\mathbf{2}$$

［B］ $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

この右辺を α の関数とみて $f(\alpha)$ とおくと，

$$f'(\alpha)=\cos\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\sin\beta\sin(2\alpha+\beta)$$

ここで $\sin\beta>0$ より $f(\alpha)$ の増減は

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-\beta}{2}$	$\cdots$	π
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		↗		↘	

となるので $\alpha=\dfrac{\pi-\beta}{2}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\pi-\beta}{2}\sin\beta\sin\frac{\pi+\beta}{2}$$
$$=\sin\beta\cos^2\frac{\beta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\beta(1+\cos\beta)$$

次に $g(\beta)=\dfrac{1}{2}\sin\beta(1+\cos\beta)$ とおくと

$$g'(\beta)=\frac{1}{2}(\cos\beta+\cos 2\beta)$$
$$=\frac{1}{2}(2\cos\beta-1)(\cos\beta+1)$$

より $g(\beta)$ の増減は

β	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$g'(\beta)$		$+$	0	$-$	
$g(\beta)$		↗		↘	

となるので $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最大値

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

をとる．このとき $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ である．

第16講　実数解に関する問題

16

［A］ a を正の実数とし，$f(x)=-x+\log(a+x)-\log(a-x)$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．x の方程式 $f(x)=0$ について，$-a<x<a$ の範囲にある異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $0<x<1$ のとき，$x\log x+\log(2-x)>0$ を証明せよ．

(2) a を $0<a<1$ なる定数とするとき，$0<x<a$ の範囲では，方程式 $x^{a}(2-x)=1$ はただ1つの解をもつことを証明せよ．

【答】 ［A］ $\begin{cases} 1\text{個} & (0<a\leqq 2) \\ 3\text{個} & (a>2) \end{cases}$

［B］ 略

【解説】

［A］

$$f'(x)=-1+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}$$
$$=\frac{x^2-a(a-2)}{(a+x)(a-x)}$$

ここで $-a<x<a$ のとき $(a+x)(a-x)>0$

$$g(x)=x^2-a(a-2)$$

とおくと

(Ⅰ) $0<a\leqq 2$ のとき

$g(x)=x^2+a(2-a)\geqq 0$ より $f'(x)\geqq 0$

$\displaystyle\lim_{x\to -a+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty$ であるから $f(x)=0$ の実数解の個数は1個．

(Ⅱ) $a>2$ のとき

$g(x)=x^2-a(a-2)=0 \iff x=\pm\sqrt{a(a-2)}$

よって $f(x)$ の増減は $f(0)=0$ より，$\alpha=\sqrt{a(a-2)}$ とおくと

x	$-a$	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	0	↘		↗	∞

となり $f(-\alpha)>0$，$f(\alpha)<0$　ゆえに $f(x)=0$ の実数解の個数は3個．

(Ⅰ)(Ⅱ)より

$$\begin{cases} \mathbf{1}\textbf{個} & \mathbf{(0<a\leqq 2)} \\ \mathbf{3}\textbf{個} & \mathbf{(a>2)} \end{cases}$$

［B］ (1)　$f(x)=x\log x+\log(2-x)$ とおくと

$$f'(x)=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}+\frac{-1}{2-x}$$
$$=\log x+1+\frac{1}{x-2}$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x-4)}{x(x-2)^2}>0$$
$$\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1-0}\left(\log x+1+\frac{1}{x-2}\right)=0$$

よって $0<x<1$ において $f'(x)<0$　これと，

$$f(1)=1\cdot\log 1+\log 1=0$$

より $f(x)>0$

(2)　$0<x<1$ より

$$x^a(2-x)=1 \iff \log x^a(2-x)=0$$
$$\iff a\log x+\log(2-x)=0$$

ここで $g(x)=a\log x+\log(2-x)$ とおくと(1)より

$$g(a)=a\log a+\log(2-a)>0$$

また

$$g'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{x-2}$$

となるが，$0<x<a$ より $\dfrac{a}{x}>1$　$0<x<a<1$ より $-2<x-2<-1$　ゆえに

$-\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{x-2}>-1$ となるので $g'(x)>0$

$$\lim_{x\to+0}g(x)=\lim_{x\to+0}\{a\log x+\log(2-x)\}=-\infty$$

より $g(x)=0$ は $0<x<a$ にただ１つの解をもつ．

第17講　不等式について

17

［A］ すべての正の数 x に対して不等式 $kx^2 \geqq \log x$ が成り立つような定数 k のうちで最小のものを求めよ．ただし，$\log x$ は自然対数である．

［B］ $0<a<b$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\log b - \log a} < \frac{a+b}{2}$$

ただし，対数は自然対数とする．

【答】［A］ $k=\dfrac{1}{2e}$

［B］ 略

【解説】

［A］ $f(x)=kx^2-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=2kx-\frac{1}{x}$$

ここで $k \leqq 0$ とすると

$$f(2)=4k-\log 2<0$$

より不適．よって $k>0$　このとき

$$f'(x)=\frac{2k}{x}\left(x^2-\frac{1}{2k}\right)$$

$$=\frac{2k}{x}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$$

より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	最小	↗

となるので $f(x) \geqq 0$ となるためには

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) \geqq 0$$

$$\iff k\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)^2-\log\frac{1}{\sqrt{2k}} \geqq 0$$

$$\iff \frac{1}{2} \geqq \log\frac{1}{\sqrt{2k}}$$

$$\iff 1 \geqq \log\frac{1}{2k}$$

$$\iff \frac{1}{2k} \leqq e$$

$$\therefore\ k \geqq \frac{1}{2e}$$

よって，求める k の最小値は

$$\boldsymbol{k=\frac{1}{2e}}$$

［B］

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\log b-\log a}<\frac{a+b}{2}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\log\frac{a}{b}}<\frac{\frac{a}{b}+1}{2}$$

$$\iff \frac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}>\log\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

よって $0<x<1$ において

$$\frac{2(x-1)}{x+1}>\log x>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

を示せばよい．

$$f(x)=\log x-\frac{2(x-1)}{x+1}$$

とおくと

$$f(x)=\log x-2+\frac{4}{x+1}$$

より

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0 \quad (0<x<1 \text{ より})$$

これと $f(1)=0$ より $0<x<1$ において $f(x)<0$

$$g(x)=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\log x$$

とおくと

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}>0 \quad (0<x<1 \text{ より})$$

これと $g(1)=0$ より $0<x<1$ において $g(x)<0$　よって，

$$\frac{2(x-1)}{x+1}>\log x>\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

第18講　積分の基礎

18

［A］　次の不定積分を求めよ．ただし，a は正の定数である．また，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \sqrt[3]{4x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int (\sqrt{x}+x)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x \sin 3x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2 dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x}$

(9) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

［B］　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-3x+2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x(x+1)(x-2)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x+6}{(x+1)^2(x^2+3)}dx$

【答】　［A］　(1) $\dfrac{3}{16}(4x+1)^{\frac{4}{3}}+C$　(2) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}x^3+C$

(3) $\dfrac{1}{20}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{4}(2x-1)^{\frac{1}{2}}+C$　(4) $-\dfrac{1}{10}\sin 5x+\dfrac{1}{2}\sin x+C$

(5) $\tan x-\dfrac{1}{\tan x}+C$　(6) $\log\dfrac{e^x}{e^x+1}+C$　(7) $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)+C$

(8) $\log|\sin x|+C$　(9) $-\dfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

［B］　(1) $\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+7x-\log|x-1|+16\log|x-2|+C$　(2) $\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x^3(x-2)}{x+1}\right|+C$

(3) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(x+1)^2}{x^2+3}-\dfrac{1}{x+1}+C$

【解説】

［A］ (1) $\displaystyle\int\sqrt[3]{4x+1}\,dx=\int(4x+1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}(4x+1)^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{4}+C=\boldsymbol{\frac{3}{16}(4x+1)^{\frac{4}{3}}+C}$

(2) $\displaystyle\int(\sqrt{x}+x)^2dx=\int\left(x+2x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{1}{3}x^3+C}$

(3) $$\int\frac{x^2}{\sqrt{2x-1}}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(2x-1)^2+\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{4}}{\sqrt{2x-1}}dx$$
$$=\int\left\{\frac{1}{4}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{20}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}(2x-1)^{\frac{1}{2}}+C}$$

(4) $$\int\sin2x\sin3x\,dx=\int\frac{-\cos(2x+3x)+\cos(2x-3x)}{2}dx$$
$$=\int\left(-\frac{1}{2}\cos5x+\frac{1}{2}\cos x\right)dx=\boldsymbol{-\frac{1}{10}\sin5x+\frac{1}{2}\sin x+C}$$

(5) $$\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2dx=\int\left(\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}+2\right)dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)dx=\boldsymbol{\tan x-\frac{1}{\tan x}+C}$$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=x-\log(e^x+1)+C=\boldsymbol{\log\frac{e^x}{e^x+1}+C}$

(7) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\int\left(x-\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C}$

(8) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\boldsymbol{\log|\sin x|+C}$

(9) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-x^2)'dx=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C}$

［B］ (1) $$\int\frac{x^4}{x^2-3x+2}dx=\int\left(x^2+3x+7+\frac{15x-14}{x^2-3x+2}\right)dx$$
$$=\int\left(x^2+3x+7-\frac{1}{x-1}+\frac{16}{x-2}\right)dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+7x-\log|x-1|+16\log|x-2|+C}$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2-2}{x(x+1)(x-2)}dx=\int\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3(x-2)}{x+1}\right|+C}$

(3) $$\int\frac{2x+6}{(x+1)^2(x^2+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x}{x^2+3}\right)dx$$
$$=\log|x+1|-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\log(x^2+3)+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{(x+1)^2}{x^2+3}-\frac{1}{x+1}+C}$$

第 19 講　部分積分

19

［A］ 以下，n を自然数とする．

(1)と(2)は不定積分を求めよ．また，(3)では I_{n+2} を I_n で表し，(4)と(5)では I_{n+1} を I_n で表せ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

(2) $\int x^2\log x\,dx$

(3) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

(4) $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$

(5) $I_n=\int_1^e (\log x)^n\,dx$

［B］ $I_n=\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

(1) I_{n+2} を I_n を用いて表せ．

(2) I_5 を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$　(2) $\dfrac{x^3}{9}(3\log x-1)+C$　(3) $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

(4) $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$　(5) $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

［B］ (1) $I_{n+2}=\dfrac{4(n+2)}{n+3}I_n$　(2) 10π

【解説】

［A］ (1) $I=\int e^{2x}\sin x\,dx$ とおくと，

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\left\{\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\int\frac{1}{4}e^{2x}\cdot(-\sin x)dx\right\}$$ より

$I=\dfrac{e^{2x}}{4}(2\sin x-\cos x)-\dfrac{1}{4}I$ となるので，$I=\boldsymbol{\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C}$

(2) $$\int x^2\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C=\boldsymbol{\frac{x^3}{9}(3\log x-1)+C}$$

(3) $$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^{n+1}x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\cos^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(n+1)\cos^n x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$$

となるので　$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

ゆえに　$\boldsymbol{I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n}$

(4)　$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n e^x dx=\boldsymbol{e-(n+1)I_n}$

(5)　$I_{n+1}=\displaystyle\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}dx$

$=e-(n+1)\displaystyle\int_1^e(\log x)^n dx$

となるので　$\boldsymbol{I_{n+1}=e-(n+1)I_n}$

［B］ (1)　$x=2\cos\theta$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ とおくと $x=2$ のとき $\theta=0$，$x=0$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

$dx=-2\sin\theta d\theta$ となるので

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(4-4\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}}\cdot(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=2^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta$$

ここで

$$(\cos\theta\sin^{n+2}\theta)'=-\sin^{n+3}\theta+(n+2)\cos\theta\sin^{n+1}\theta\cos\theta$$
$$=-(n+3)\sin^{n+3}\theta+(n+2)\sin^{n+1}\theta$$

より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin^{n+2}\theta)'d\theta=\Big[\cos\theta\sin^{n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-(n+3)\cdot\frac{I_{n+2}}{2^{n+3}}+(n+2)\cdot\frac{I_n}{2^{n+1}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{I_{n+2}=\frac{4(n+2)}{n+3}I_n}$$

(2)

$$I_5=\frac{4\cdot5}{6}I_3$$

$$=\frac{4\cdot5}{6}\cdot\frac{4\cdot3}{4}I_1$$

$$=\frac{4\cdot5}{6}\cdot\frac{4\cdot3}{4}\cdot2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta$$

$$=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$=20\Big[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{=10\pi}$$

第 20 講　置換積分

20

［A］ (5)までは不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．また，(6)以降は定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

(3) $\displaystyle\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$

(5) $\displaystyle\int\sin(\log x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

［B］ 次の問いに答えよ．

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ．

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

【答】 ［A］ (1) $-\dfrac{1}{4(2-x^2)^2}+\dfrac{1}{3(2-x^2)^3}+C$

(2) $\dfrac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+C$　(3) $\dfrac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

(4) $2\log(1+\sqrt{x})+C$　(5) $\dfrac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C$　(6) $\dfrac{\pi}{12}$　(7) $\dfrac{\pi}{6}$

［B］ (1) $y=g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$　(2) 略

【解説】

［A］ (1)　$2-x^2=t$ とおくと $-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x^3dx=-\dfrac{1}{2}x^2dt$　よって

$x^3dx=-\dfrac{1}{2}(2-t)dt$ となるので，

$$\int\frac{x^3}{(2-x^2)^4}dx=\int\frac{1}{t^4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2-t)dt=\int\left(\frac{1}{2t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt=-\frac{1}{4t^2}+\frac{1}{3t^3}+C$$

$$=-\boldsymbol{\frac{1}{4(2-x^2)^2}+\frac{1}{3(2-x^2)^3}+C}$$

(2)　$e^x+1=t$ とおくと $e^x=\dfrac{dt}{dx}$ より $e^{3x}dx=e^{2x}dt$　よって $e^{3x}dx=(t-1)^2dt$ となるので，

$$\int\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}(t-1)^2dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}(e^x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}+2(e^x+1)^{\frac{1}{2}}+C}$$

(3)　$4-x^2=t$ とおくと $-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x^3dx=-\dfrac{1}{2}x^2dt$　よって $x^3dx=-\dfrac{1}{2}(4-t)dt$

となるので，

$$\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{t}\,(4-t)dt=\int\left(\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C}$$

(4)　$1+\sqrt{x}=t$ とおくと $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2dt$ となるので，

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\int\frac{1}{t}\cdot 2dt=2\log|t|+C=\boldsymbol{2\log(1+\sqrt{x})+C}$$

(5)　$\log x=t$ とおくと $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $dx=x\,dt$　よって $dx=e^tdt$ となるので，

$\displaystyle\int\sin(\log x)dx=\int\sin t\cdot e^tdt$ となる．

ここで $\left\{\dfrac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)\right\}'=e^t\sin t$ となるので

$$\int\sin t\cdot e^tdt=\frac{e^t}{2}(\sin t-\cos t)+C=\boldsymbol{\frac{x}{2}\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C}$$

(6)　$x=3\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{3}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{3}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，$x=0$ のとき $\theta=0$,

$x=3$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{9(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3}d\theta=\left[\frac{\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$$

(7)　$x=2\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より $dx=2\cos\theta d\theta$ であり，$x=0$ のとき $\theta=0$，$x=1$

のとき $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ なので

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}\cdot 2\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

［B］（1）$f'(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}>0$ より $x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$ を y について解けばよい.

$$(e^y+1)x=e^y \iff e^y(1-x)=x$$
$$\iff e^y=\frac{x}{1-x}$$

よって

$$y=\log\frac{x}{1-x} \qquad \therefore\ \boldsymbol{g(x)=\log\frac{x}{1-x}} \quad (0<x<1)$$

（2）$\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$ において $x=f(t)$ と置換すると

$x=f(b)$ のとき $t=b$,　$x=f(a)$ のとき $t=a$,

$dx=f'(t)dt$

であるので

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=\int_a^b tf'(t)dt$$
$$=\Big[tf(t)\Big]_a^b-\int_a^b f(t)dt$$

ゆえに

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

第21講　面積

21

［A］ $a>1$ に対して，$S(a)$ を3つの曲線

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=a\cos x \quad \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

で囲まれた部分の面積とする．

(1) $S(a)$ を a の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to1}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ．

［B］ 方程式 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$ で表される曲線を C,

方程式 $y=x+9+\dfrac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}$ で表される曲線を D とするとき，曲線 C と曲線 D で囲まれた図形の面積を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $S(a)=-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1$ (2) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

［B］ $12\log3-\dfrac{16}{3}$

【解説】

［A］ (1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $y=\sin x$ と $y=\cos x$ の共有点の x 座標は $x=\dfrac{\pi}{4}$ となる．

また $y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における共有点の x 座標を t とおくと

$$\sin t=a\cos t \qquad \therefore\quad \tan t=a$$

このとき

$$\sin t=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}},\qquad \cos t=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{t}\sin x\,dx+\int_{t}^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{t}+\Big[a\sin x\Big]_{t}^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\left(-\cos t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+a(1-\sin t)-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\&=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+a-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=\boldsymbol{-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1}\end{aligned}$$

(2)　(1)の結果より

$$\lim_{a\to 1}\frac{S(a)}{a-1}=\lim_{a\to 1}\frac{-\sqrt{a^2+1}+a+\sqrt{2}-1}{a-1}=\lim_{a\to 1}\left(1-\frac{a+1}{\sqrt{2}+\sqrt{a^2+1}}\right)$$

$$=\mathbf{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

［B］　曲線 C について

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y}=2\sqrt{2}$$

$$\iff \sqrt{y}=2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}$$

$$\iff y=(2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1})^2 \text{ かつ } 2\sqrt{2}-\sqrt{x^2+1}\geqq 0$$

$$\therefore\ y=9+x^2-4\sqrt{2(x^2+1)} \text{ かつ } -\sqrt{7}\leqq x\leqq\sqrt{7}$$

となる．ここで

$$\left\{x+9+\frac{12}{x+4}-4\sqrt{2(x^2+1)}\right\}-\{9+x^2-4\sqrt{2(x^2+1)}\}$$

$$=-x^2+x+\frac{12}{x+4}$$

$$=-\frac{(x-2)(x+2)(x+3)}{(x+4)} \quad \cdots\cdots①$$

$-\sqrt{7}\leqq x\leqq\sqrt{7}$ において ①$=0$ の解は $x=\pm 2$ だけであり，$-2\leqq x\leqq 2$ において ①$\geqq 0$ なので，求める面積は

$$\int_{-2}^{2}\left(-x^2+x+\frac{12}{x+4}\right)dx=2\left[-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\Big[12\log(x+4)\Big]_{-2}^{2}$$

$$=\mathbf{12\log 3-\frac{16}{3}}$$

第 22 講　体積

22

［A］ $C : x^2+(y-1)^2=4$ に関して，C を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

［B］ xyz 空間の xy 平面上に

曲線 $C : y=x^2,\ z=0$

直線 $l : y=x+a,\ z=0\quad (a \leqq 1)$

がある．いま C と l の交点を P，Q とし，線分 PQ を底辺とする正三角形 PQR を xy 平面に垂直に作る．直線 l を $a=1$ から C に接するまで動かすとき，この正三角形が通過してできる立体の体積 V を求めよ．

【答】 ［A］ $\dfrac{2(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{3}$

［B］ $\dfrac{25\sqrt{6}}{32}$

【解説】

［A］ $x^2+(y-1)^2=4$ を y について解くと $y=1\pm\sqrt{4-x^2}$ となる．ここで，この円は y 軸に関して対称であり，$y=0$ とすると $x=\pm\sqrt{3}$ であることより，求める体積 V は

$$
\begin{aligned}
V&=2\left\{\int_0^2\pi(1+\sqrt{4-x^2})^2dx-\int_{\sqrt{3}}^2\pi(1-\sqrt{4-x^2})^2dx\right\}\\
&=2\pi\left\{\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx-\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx\right\}\\
&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx+2\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx\right\}\\
&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta\right\}\\
&=2\pi\left\{\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}2(1+\cos 2\theta)d\theta\right\}\\
&=2\pi\left\{\left[5x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+2\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{2(9\sqrt{3}+8\pi)\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

［B］ C と l が接するときは

$$x^2=x+a \iff x^2-x-a=0$$

が重解をもつときなので，

$$(-1)^2-4\times(-a)=0 \qquad \therefore \quad a=-\frac{1}{4}$$

ここで題意の立体は，$z=0$ における $y=-x$ 上の

点 $\mathrm{H}\left(-\dfrac{u}{\sqrt{2}},\ \dfrac{u}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ $\left(-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通り，

$y=-x$ に垂直な平面で切った切り口は正三角形となり，H が l 上のとき

$$\frac{u}{\sqrt{2}}=-\frac{u}{\sqrt{2}}+a \qquad \therefore \quad a=\sqrt{2}\,u$$

よって

$$V=\int_{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{PQ}^2\,du$$

P，Q の x 座標をそれぞれ α，β とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\{\sqrt{2}\,|\alpha-\beta|\}^2\\&=2(\alpha-\beta)^2\\&=2(4a+1)\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}V&=\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2(4a+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,da\\&=\int_{-\frac{1}{4}}^{1}\frac{\sqrt{6}}{4}(4a+1)\,da\\&=\left[\frac{\sqrt{6}}{32}(4a+1)^2\right]_{-\frac{1}{4}}^{1}\\&=\boldsymbol{\frac{25\sqrt{6}}{32}}\end{aligned}$$

第23講　積分でやっておくこと（その１）

23

［A］　座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=r(t)\cos t$, $y=r(t)\sin t$ で与えられている．ただし，$r(t)=1+\cos t$ であるとする．

(1)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲で，点Pの速さ（速度の大きさ）が1となる時刻を求めよ．

(2)　$0\leqq t\leqq 2\pi$ の間に，点Pが動いた道のりを求めよ．

［B］　$x>0$ に対して関数

$$f(x)=\frac{3}{x^3}\int_0^x|t^2-x|\,dt$$

を考える．

(1)　関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ．

(3)　関数 $f(x)$ のグラフの概形をかけ．

【答】［A］(1) $t=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$　(2) 8

［B］(1) $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x\sqrt{x}} & (x\geqq 1)\\ -1+\dfrac{3}{x} & (0<x<1)\end{cases}$　(2) $\dfrac{3}{4}$ $(x=4)$　(3) 略

【解説】

［A］(1)

$$\text{速度 }\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$$
$$=(r'(t)\cos t-r(t)\sin t,\ r'(t)\sin t+r(t)\cos t)$$

より

$$|\vec{v}|^2=\{r'(t)\cos t-r(t)\sin t\}^2+\{r'(t)\sin t+r(t)\cos t\}^2$$
$$=\{r'(t)\}^2+\{r(t)\}^2$$
$$=(-\sin t)^2+(1+\cos t)^2$$
$$=2(1+\cos t)$$

となるので

$$|\vec{v}|=1\iff\cos t=-\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \boldsymbol{t=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$$

(2)　$|\vec{v}|^2=4\cos^2\dfrac{t}{2}$ より道のり l は

$$l=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$
$$=\int_0^{\pi}4\cos\frac{t}{2}\,dt$$
$$=\left[8\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi}=\mathbf{8}$$

［B］ (1)(Ⅰ)　$x \geqq 1$ のとき

$\sqrt{x} \leqq x$ より $0 \leqq t < \sqrt{x}$ で $t^2 - x < 0$，$\sqrt{x} \leqq t \leqq x$ で $t^2 - x \geqq 0$ となるので

$$\frac{x^3}{3}f(x) = \int_0^{\sqrt{x}}(-t^2+x)dt + \int_{\sqrt{x}}^{x}(t^2-x)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + xt\right]_0^{\sqrt{x}} + \left[\frac{1}{3}t^3 - xt\right]_{\sqrt{x}}^{x}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x}$$

(Ⅱ)　$0 < x < 1$ のとき

$0 \leqq t \leqq x$ において $t^2 - x \leqq 0$ となるので

$$\frac{x^3}{3}f(x) = \int_0^{x}(-t^2+x)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + xt\right]_0^{x} = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$$

(Ⅰ)(Ⅱ)より　$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x\sqrt{x}} & (x \geqq 1) \\ -1 + \dfrac{3}{x} & (0 < x < 1) \end{cases}}$

(2)　$x > 1$ のとき

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^2\sqrt{x}} = \frac{3(\sqrt{x}-2)}{x^2\sqrt{x}}$$

$0 < x < 1$ のとき

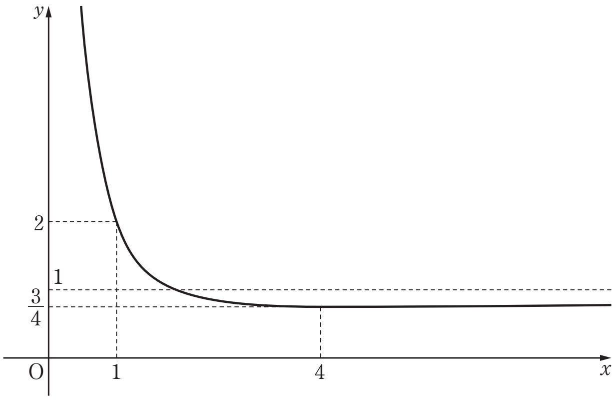
$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} < 0$$

となるので，$f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	(-3)	$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	2	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

よって $f(x)$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$　$\boldsymbol{(x=4)}$

(3)　$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$，$f(1)=2$ などにより



第24講　積分でやっておくこと（その2）

24

［A］ e を自然対数の底とする．

(1) $x>0$ で $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$，$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ とする．

$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$ を証明せよ．

(2) $\dfrac{1}{4e}\leqq\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\dfrac{1}{2e}$ を証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx$ を求めよ．

［B］ n を自然数とする．

(1) $\displaystyle\int_1^n\log x\,dx$ を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，不等式

$$\frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}-\log n+1>0$$

が成り立つことを示せ．

【答】 ［A］ (1) 略 (2) 略 (3) $\dfrac{1}{2}$

［B］ (1) $n\log n-n+1$ (2) 略

【解説】

［A］ (1) $f(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}+\dfrac{1}{4x^3}e^{-x^2}$ より

$$f'(x)=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}+e^{-x^2}-\frac{3}{4x^4}e^{-x^2}-\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}$$

$$\iff\quad e^{-x^2}-f'(x)=\frac{3}{4x^4}e^{-x^2}>0$$

$g(x)=-\dfrac{1}{2x}e^{-x^2}$ より

$$g'(x)=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}+e^{-x^2}$$

$$\iff\quad g'(x)-e^{-x^2}=\frac{1}{2x^2}e^{-x^2}>0$$

よって

$$f'(x)\leqq e^{-x^2}\leqq g'(x)$$

(2) (1)より　$n\to\infty$ より　$n\geqq 2$ とすると

$$\int_1^n f'(x)dx<\int_1^n e^{-x^2}dx<\int_1^n g'(x)dx$$

$$\iff\quad \Big[f(x)\Big]_1^n<\int_1^n e^{-x^2}dx<\Big[g(x)\Big]_1^n$$

$$\iff\quad f(n)-f(1)<\int_1^n e^{-x^2}dx<g(n)-g(1)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\{f(n)-f(1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2ne^{n^2}}+\frac{1}{4n^3e^{n^2}}+\frac{1}{4e}\right)$$
$$=\frac{1}{4e}$$
$$\lim_{n\to\infty}\{g(n)-g(1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2ne^{n^2}}+\frac{1}{2e}\right)$$
$$=\frac{1}{2e}$$

よって

$$\frac{1}{4e}\leqq\lim_{n\to\infty}\int_1^n e^{-x^2}dx\leqq\frac{1}{2e}$$

(3)　(1)より　$n>0$ のとき

$$\int_n^{n+1}f'(x)dx<\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx<\int_n^{n+1}g'(x)dx$$
$$\iff\quad f(n+1)-f(n)<\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx<g(n+1)-g(n)$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\{f(n+1)-f(n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{ne^{n^2}}{2(n+1)e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{4(n+1)^3e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{2ne^{n^2}}-\frac{ne^{n^2}}{4n^3e^{n^2}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{4(n+1)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4n^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\{g(n+1)-g(n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{ne^{n^2}}{2(n+1)e^{(n+1)^2}}+\frac{ne^{n^2}}{2ne^{n^2}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{2n+1}}+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}ne^{n^2}\int_n^{n+1}e^{-x^2}dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

［B］ (1)

$$\int_1^n \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^n$$
$$= \boldsymbol{n\log n - n + 1}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\log k$ を $y=\log x$ のグラフと x 軸，$x=n$ で囲まれた部分の面積と比較すると

$$\sum_{k=1}^{n}\log k > \int_1^n \log x\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\log k > n\log n - n + 1$$
$$\therefore \quad \frac{\sum_{k=1}^{n}\log k}{n} - \log n + 1 > \frac{1}{n}$$

よって題意が示された.

練習問題解答

第１講　複素数平面の基礎

1　次の問いに答えよ．

(1)　座標平面上の点 A(2, 1) を原点 O のまわりに 60° 回転した点 B の座標を求めよ．

(2)　点 A(2, 1) を点 P のまわりに 60° 回転した点の座標は $\left(\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった．点 P の座標を求めよ．

【答】 (1) $B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) P(1, −2)

【解説】

(1)　B(z) とすると，

$$z-0=(2+i-0)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\therefore\quad z=(2+i)\cdot\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+2\sqrt{3}}{2}i$$

よって

$$\mathbf{B}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2)　P(z) とすると，

$$\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i-z$$

$$=(2+i-z)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)$$

$$\iff\quad \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}z=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\iff\quad z=\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore\quad z=1-2i$$

ゆえに

$$\mathbf{P(1,\ -2)}$$

第２講　複素数で点を移動

2　複素数平面の原点を P_0 とし，P_0 から実軸の正の方向に１進んだ点を P_1 とする．次に P_1 を中心として 45° 回転して向きを変え，$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 進んだ点を P_2 とする．以下同様に P_n に到達したあと 45° 回転してから前回進んだ距離の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍進んで到達する点を P_{n+1} とする．このとき点 P_{10} が表す複素数を求めよ．

【答】 $\frac{33}{32}+\frac{31}{32}i$

【解説】

$P_n(\alpha_n)$ とおくと，

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_1=1$$

ここで題意より

$$\begin{aligned}&\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}\\&=(\alpha_n-\alpha_{n+1})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos(-135^\circ)+i\sin(-135^\circ)\}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=\beta$ とおくと

$$\alpha_{n+1}-\alpha_n=(\alpha_1-\alpha_0)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)\right\}^n$$

$$\therefore\quad \alpha_{n+1}-\alpha_n=\beta^n$$

この式に $n=0,\ 1,\ \cdots,\ 9$ を代入して辺々を加えると，

$$\alpha_{10}-\alpha_0=\beta^0+\beta^1+\cdots+\beta^9$$

$$\iff\quad \alpha_{10}=\frac{\beta^{10}-1}{\beta-1}$$

$$=\frac{\frac{1}{32}i-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{33}{32}+\frac{31}{32}i}$$

第３講　複素数の方程式と図形

3　k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする．i を虚数単位として次の問いに答えよ．

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ．

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする．∠APB が直角になるような k の値を求めよ．

【答】　(1) $k<0$，$3<k$ のとき $4k^2-6k+2$，$0<k<3$ のとき $6k+2$　(2) $k=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，1

【解説】

(1)　重解を持つ場合は考えなくてもよいので

$$(2k)^2-4\cdot 1\cdot 3k=4k(k-3)$$

より　$k<0$，$k>3$ のとき実数解，$0<k<3$ のとき虚数解をもつ．

(Ⅰ)　$k<0$，$k>3$ のとき α，β は実数より

$$\begin{aligned}
&|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2\\
&=(\alpha-i)(\overline{\alpha}+i)+(\beta-i)(\overline{\beta}+i)\\
&=\alpha\overline{\alpha}+i\alpha-i\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\beta}+i\beta-i\overline{\beta}+1\\
&=\alpha^2+\beta^2+2\\
&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2\\
&=(-2k)^2-2\cdot 3k+2\\
&=\boldsymbol{4k^2-6k+2}
\end{aligned}$$

(Ⅱ)　$0<k<3$ のとき α，β は実数係数の 2 次方程式の虚数解だから $\beta=\overline{\alpha}$ と表せる．このとき

$$\begin{aligned}
&|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2\\
&=\alpha\overline{\alpha}+i\alpha-i\overline{\alpha}+1+\beta\overline{\beta}+i\beta-i\overline{\beta}+1\\
&=2\alpha\overline{\alpha}+2\\
&=2\cdot 3k+2\\
&=\boldsymbol{6k+2}
\end{aligned}$$

(2)　三平方の定理より

$$\begin{aligned} & \mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{AB}^2 \\ \iff\ & |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\beta-\alpha|^2 \\ \iff\ & |\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta| \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ =\ & (-2k)^2-4\cdot 3k \\ =\ & 4k(k-3) \end{aligned}$$

より

(Ⅰ)　$k<0$, $k>3$ のとき

$$4k^2-6k+2=4k(k-3) \iff k=-\frac{1}{3}$$

(Ⅱ)　$0<k<3$ のとき

$$\begin{aligned} 6k+2=-4k(k-3) & \iff 4k^2-6k+2=0 \\ & \iff 2(2k-1)(k-1)=0 \\ & \therefore\ k=\frac{1}{2},\ 1 \end{aligned}$$

よって

$$\boldsymbol{k=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1}$$

第４講　ド・モアブルの定理

4　$z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき，方程式 $z^5+\dfrac{1}{z^5}=2\cos 3\theta$ $(0<\theta<\pi)$ を満たす θ の個数は，合計 ＿＿＿ 個である．

【答】 3

【解説】

$z=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ より

$$\frac{1}{z}=\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

よって

$$\begin{aligned}&z^5+\frac{1}{z^5}\\&=\left(\cos\frac{10}{3}\pi+i\sin\frac{10}{3}\pi\right)+\left\{\cos\left(-\frac{10}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{10}{3}\pi\right)\right\}\\&=2\cos\frac{10}{3}\pi\\&=-1\end{aligned}$$

ゆえに $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ を満たす θ の個数は $0<3\theta<3\pi$ より

$$3\theta=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi \qquad \therefore\ \ \theta=\frac{2}{9}\pi,\ \frac{4}{9}\pi,\ \frac{8}{9}\pi$$

の３個．

第５講　２次曲線

5　次の問いに答えよ．

(1)　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$（ただし $x_0\neq 0$）を考え，点 Q と F を通る直線を l_1，点 Q を通り放物線 C の軸に平行な直線を l_2 とする．このとき，点 Q における C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ．

(2)　放物線 $y=x^2-2\sqrt{2}\,x+4$ 上の点 $\mathrm{R}(a,\ b)$（$a>\sqrt{2}$）における接線と直線 $x=a$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点 R を通り傾きが $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

【解説】

(1)　Q は $x^2=4py$ 上の点なので　$y=\dfrac{1}{4p}x^2$ より $y'=\dfrac{1}{2p}x$ となり，l の傾き

$$y'=\frac{1}{2p}x_0$$

を得る．

ここで l_2 と $y=-p$ との交点は

$$\mathrm{A}(x_0,\ -p)$$

とおけるので，AF の傾きは

$$\frac{-p-p}{x_0-0}=-\frac{2p}{x_0}$$

となるので

$$\frac{1}{2p}x_0\times\left(-\frac{2p}{x_0}\right)=-1$$

より $\mathrm{AF}\perp l$ である．

AF と l との交点を H とおくと，QA＝QF より H は二等辺三角形 QAF の頂点 Q から底辺に下ろした垂線の足となるので，△QFH と △QAH は合同であり，題意は示された．

(2)
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4 \\ &= (x-\sqrt{2})^2 + 2 \end{aligned}$$
$$\iff \quad y-2 = \frac{1}{4\times\frac{1}{4}}(x-\sqrt{2})^2$$

ここで，$\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) &= \frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} \end{aligned}$$

であるが，これは $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときにも成立するので，(1)において $p = \dfrac{1}{4}$ として x 軸方向に $\sqrt{2}$，y 軸方向に 2 平行移動したものを考えると，題意の定点は

$$\left(0,\ \frac{1}{4}\right) + (\sqrt{2},\ 2) = \left(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \frac{9}{4}}\right)$$

第６講　媒介変数で表示された曲線

6　$(x,\ y)=(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t)$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を図示せよ．

【答】　略

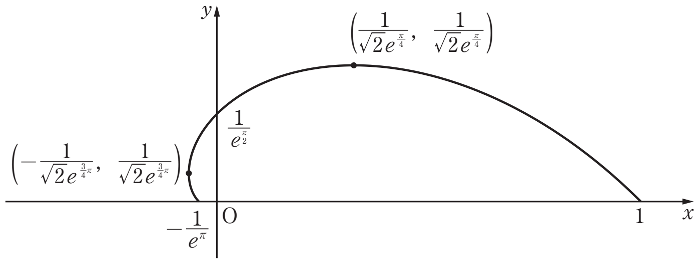
【解説】

$\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{5}{4}\pi\right),\ \sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\dfrac{3}{4}\pi\right)\right)$ であることと

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$ より増減は

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
x'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	$\nwarrow$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}}\right)$	$\swarrow$	$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\,e^{\frac{3}{4}\pi}}\right)$	$\searrow$	$\left(-\dfrac{1}{e^{\pi}},\ 0\right)$

となるので，グラフは以下の通り．



第７講　極限の基本

7　$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+ax+1)$ は $a=$［　　］であるとき，かつそのときに限り極限値［　　］をもつ．

【答】　順に，-1，1

【解説】

$a\geqq 0$ のとき

$$\sqrt{x^2+1}+ax+1$$
$$=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{1}{x}\right)\to\infty\ (x\to\infty)$$

$a<0$ のとき $a=-b$ とおくと $b>0$

$$\sqrt{x^2+1}+ax+1$$
$$=\sqrt{x^2+1}-bx+1$$
$$=\frac{(x^2+1)-(bx-1)^2}{\sqrt{x^2+1}+bx-1}$$
$$=\frac{(1-b^2)x^2+2bx}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+b-\frac{1}{x}\right)}$$
$$=\frac{(1-b^2)x+2b}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+b-\frac{1}{x}}\quad\cdots\cdots①$$

ここで　$1-b^2\neq 0$ とすると①は収束しない．よって

$$1-b^2=0\qquad\therefore\quad b=1\quad\text{すなわち，}a=\mathbf{-1}$$

このとき

$$①=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}\to\mathbf{1}\ (x\to\infty)$$

第８講　漸化式と極限

8　ある１面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている．平面に接する面(底面)の４辺のうち１辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う．ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする．この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく．

(1)　a_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け．

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ．

【答】　(1) $a_2=\frac{1}{2}$　(2) $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$　(3) $b_n=\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ $(n\geqq1)$，$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{6}$

【解説】

(1)　１回目には印のついた面が側面にくるので $a_1=1$

よって

$$a_2=a_1\times\frac{2}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2)　$a_1=1$ と対称性より底面にくる確率と上面にくる確率は等しい．ゆえに

$$a_n+2b_n=1$$

$$\therefore\quad b_n=\frac{1-a_n}{2}$$

よって

$$a_{n+1}=a_n\times\frac{2}{4}+2b_n\times1$$

$$=\frac{1}{2}a_n+(1-a_n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1}$$

(3)

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+1$$

$$\iff\quad a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\quad a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

ゆえに

$$b_n=\frac{1}{2}\left[1-\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}\right]$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

第９講　ちょっと困った極限

9 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$ と $a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n\geqq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の各問いに答えよ．

(1) a_3 を求めよ．

(2) $x_1<x_2<2$ のとき，$f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つことを示せ．

(3) $n=3$，4，$\cdots$ に対し，$a_n<1+\frac{2}{n}$ が成り立つことを示せ．

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

【答】 (1) $a_3=\frac{11}{8}$　(2) 略　(3) 略　(4) $\lim_{n\to\infty} a_n=1$

【解説】

(1)

$$a_2=f(a_1)$$
$$=-\frac{1}{2}{a_1}^2+2a_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$a_3=f(a_2)$$
$$=-\frac{1}{2}{a_2}^2+2a_2-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{11}{8}}$$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}$ より $f(x)$ は $x\leqq 2$ において単調増加であるので

$$x_1<x_2<2 \iff f(x_1)<f(x_2)<f(2)$$

(3) $a_3=\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}<1+\frac{2}{3}$ より $n=3$ のとき

$$a_n<1+\frac{2}{n} \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つので，$n\geqq 3$ のとき①の成立を仮定すると，$a_n<1+\frac{2}{n}<2$ より

$$a_{n+1}-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=f(a_n)-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$<f\left(1+\frac{2}{n}\right)-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^2+\frac{3}{2}-\left(1+\frac{2}{n+1}\right)$$
$$=\frac{-2}{n^2(n+1)}<0$$
$$\therefore\quad a_{n+1}<1+\frac{2}{n+1}$$

が成り立ち，帰納的に①は示された．

(4)
$$f(x)-1=-\frac{1}{2}(x-1)(x-3),\quad a_1=2$$

と(3)により帰納的に

$$1<a_n<1+\frac{2}{n}$$

$$\Longleftrightarrow\quad 0<a_n-1<\frac{2}{n}$$

が成り立つが,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=1}$$

第 10 講　無限級数

10　$f(x)=-\frac{1}{2}x+3$ とする．$x_1=1$ とおいて数列 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ をつくり，座標平面上に点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ f(x_n))$ をとる．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{x_n\}$ の一般項 x_n を求めよ．

(2)　動点Pが点 P_1 を出発して，P_2，P_3，P_4，…，P_n，… と進むとき，動点Pはどのような点に近づくか，その座標を求めよ．

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを l_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．$L=\sum_{n=1}^{\infty}l_n$ を求めよ．

【答】 (1) $x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　(2) $(2,\ 2)$　(3) $L=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

【解説】

(1)　$x_n=-\frac{1}{2}x_{n-1}+3$ より

$$x_n-2=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-2)$$

とできるので，

$$x_n-2=(x_1-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{x_n=2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

(2)　P_n は常に直線 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 上なので，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$$

よりPは $(2,\ f(2))$，つまり **(2，2)** に近づく．

(3)

$$\begin{aligned} l_n=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}&=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_{n+1}-x_n| \\ &=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| \\ &=\frac{3\sqrt{5}}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

であるので，$0<\frac{1}{2}<1$ より

$$L=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$$

第 11 講　微分の基本

11　定義に従って微分することにより，以下の微分の公式

$$\{\sqrt{f(x)}\}'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

を示せ.

【答】　略

【解説】

$$\begin{aligned}\{\sqrt{f(x)}\}'&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(x+h)}-\sqrt{f(x)}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h\{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}\}}\\&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{\sqrt{f(x+h)}+\sqrt{f(x)}}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}\\&=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\end{aligned}$$

第 12 講　接線など

> 12　a，b を実数とする．2 つの関数
> $$f(x)=\log(x^2+1)$$
> $$g(x)=ax^2+b\quad(a\neq 0)$$
> について，曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ．

【答】　$b=0$ または $b=a-\log a-1$ $(0<a<1)$

【解説】

共有点の x 座標を α とおくと

$$f(\alpha)=g(\alpha) \text{ かつ } f'(\alpha)=g'(\alpha)$$

$$\iff \begin{cases} \log(\alpha^2+1)=a\alpha^2+b & \cdots\cdots① \\ \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}=2a\alpha & \cdots\cdots② \end{cases}$$

ここで

$$② \iff \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}\{1-a(\alpha^2+1)\}=0$$

$$\iff \alpha=0 \text{ または } a(\alpha^2+1)=1$$

$\alpha=0$ のとき①より $b=0$　このとき a は任意．

$$a(\alpha^2+1)=1 \iff \alpha^2=\frac{1}{a}-1$$

これを，$\dfrac{1}{a}-1>0 \iff 0<a<1$ に注意しながら①へ代入して

$$① \iff \log\frac{1}{a}=a\left(\frac{1}{a}-1\right)+b$$

$$\iff b=a-\log a-1$$

よって

$$\boldsymbol{b=0 \text{ または } b=a-\log a-1\ (0<a<1)}$$

第13講　グラフの描き方（その1）

> **13**　関数 $f(x)=(x^2-1)e^x$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．
> (1)　関数 $f(x)$ の極値を求め，曲線 $y=f(x)$ の概形を描け．
> (2)　この曲線の変曲点のうちで x 座標がもっとも大きいものを求め，またそこにおける接線の方程式を求めよ．

【答】 (1) 極大値 $2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$，極小値 $2(1-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$

(2) 変曲点 $(-2+\sqrt{3},\ 2(3-2\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}})$，$y=2e^{-2+\sqrt{3}}\{(1-\sqrt{3})x+8-5\sqrt{3}\}$

【解説】

(1)

$$f'(x)=2xe^x+(x^2-1)e^x$$
$$=(x^2+2x-1)e^x$$

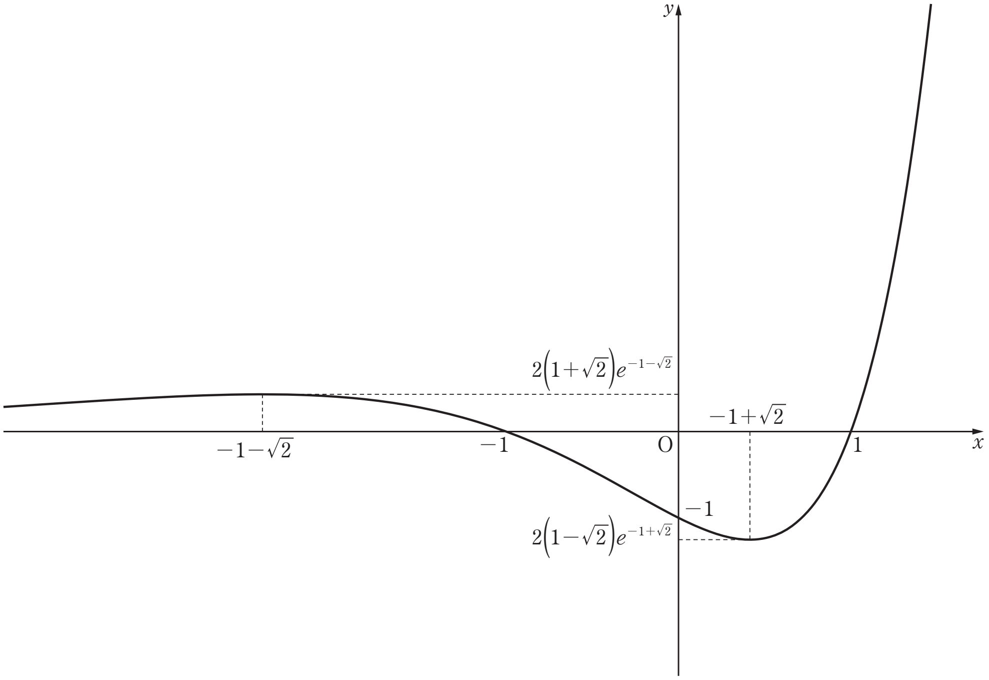
より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗		↘		↗	∞

となるので，**極大値は $f(-1-\sqrt{2})=2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$**，

極小値は $f(-1+\sqrt{2})=2(1-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$　となる．

よって概形は



(2)　$f''(x)=(x^2+4x+1)e^x$ より $x^2+4x+1=0$

よって $x=-2\pm\sqrt{3}$　ゆえに題意の変曲点は

$$\boldsymbol{(-2+\sqrt{3},\ 2(3-2\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}})}$$

ここで $x=p$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=(p^2+2p-1)e^p(x-p)+(p^2-1)e^p \\ &=(p^2+2p-1)e^px+(-p^3-p^2+p-1)e^p \end{aligned}$$

であるが，$p=-2+\sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned} p^2+2p-1&=(p^2+4p+1)-2(p+1) \\ &=-2(-1+\sqrt{3}) \\ -p^3-p^2+p-1&=(p^2+4p+1)(-p+3)-2(5p+2) \\ &=-2(-8+5\sqrt{3}) \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}&=-2(-1+\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}}x-2(-8+5\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}} \\ &\boldsymbol{=2e^{-2+\sqrt{3}}\{(1-\sqrt{3})x+8-5\sqrt{3}\}} \end{aligned}$$

第 14 講　グラフの描き方（その２）

14　$f(x)=2\sin x+\sin x\cos x$　$\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け.

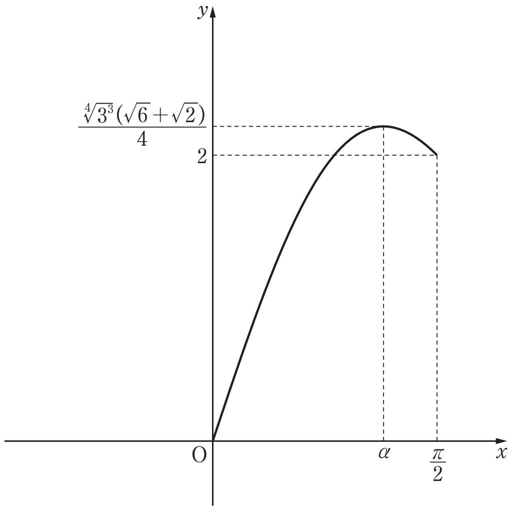
【答】　略

【解説】

$f'(x)=2\cos^2x+2\cos x-1$ より，α を $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数としたとき $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\sqrt[4]{3^3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$	↘	2

となるので，$y=f(x)$ のグラフは



第 15 講　最大・最小

15 座標空間内に 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C$(-\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)$, D$(0,\ -\cos\beta,\ -\sin\beta)$ がある．ただし，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) 四面体 ABCD の体積 V を α，β を用いて表せ.

(2) $\alpha=\beta$ を満たしながら 2 点 C，D が動くとき，V の最大値を求めよ.

【答】 (1) $V=\dfrac{1}{6}\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

【解説】

(1) この四面体を xy 平面で 2 つの部分に分けて考える．CD 上の点は

$$(1-t)(-\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha)+t(0,\ -\cos\beta,\ -\sin\beta)$$
$$=((t-1)\cos\alpha,\ -t\cos\beta,\ \sin\alpha-t(\sin\alpha+\sin\beta))$$

と表せるが，これが xy 平面上にあるとき

$$\sin\alpha-t(\sin\alpha+\sin\beta)=0$$
$$\iff\quad t=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

よって CD と xy 平面との交点を E とすると

$$\mathrm{E}\left(\frac{-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},\ \frac{-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta},\ 0\right)$$

これを E$(-a,\ -b,\ 0)$ とおくと △ABE の面積は

$$(1+a)(1+b)-\frac{1}{2}a(1+b)-\frac{1}{2}b(1+a)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(1+a+b)$$

つまり

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\right)$$

となる．これを S とおくと，2 つの部分の和 V は

$$V=S\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{3}+S\cdot\sin\beta\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}S(\sin\alpha+\sin\beta)$$
$$=\frac{1}{6}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)\}}$$

(2)　$\alpha=\beta=x$ とおくと

$$V=\frac{1}{6}(2\sin x+\sin 2x)$$

ここで $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos x+2\cos 2x\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

より $0<x\leqq\frac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

となり $x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

をとるので V の最大値は

$$\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

第 16 講　実数解に関する問題

16　x の方程式 $\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k$ が，$x \geqq 0$ の範囲で解をもつための実数 k の満たすべき条件を求めよ．ただし c は $0 \leqq c<1$ を満たす定数とする．

【答】　$c<k \leqq 1$

【解説】

$\sqrt{x^2+2cx+1}=x+k \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+2cx+1}-x=k$ より，$f(x)=\sqrt{x^2+2cx+1}-x$ とおいて，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点をもつ場合を考える．

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{x+c}{\sqrt{x^2+2cx+1}}-1 \quad \cdots\cdots①\\
&=\frac{(x+c)-\sqrt{x^2+2cx+1}}{\sqrt{x^2+2cx+1}}\\
&=\frac{(x+c)^2-(x^2+2cx+1)}{\sqrt{x^2+2cx+1}\left(x+c+\sqrt{x^2+2cx+1}\right)}\\
&=\frac{(c+1)(c-1)}{\sqrt{x^2+2cx+1}\left(x+c+\sqrt{x^2+2cx+1}\right)} \quad \cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

ここで

$x+c \leqq 0$ のとき①により　$f'(x)<0$

$x+c>0$ のとき②，$0 \leqq c<1$ により　$f'(x)<0$

この結果と

$$f(0)=1,\qquad \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2c+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2c}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=c$$

より $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	c

となる．よって

$$\boldsymbol{c<k \leqq 1}$$

第 17 講　不等式について

17　$0<x<1$ のとき，不等式

$$\log\frac{1}{1-x^2}<\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2$$

が成り立つことを示せ.

【答】　略

【解説】

$f(x)=\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2-\log\frac{1}{1-x^2}$ とおくと

$$\begin{aligned}f(x)&=\{-\log(1-x)\}^2+\log(1-x)(1+x)\\&=\{\log(1-x)\}^2+\log(1-x)+\log(1+x)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\log(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}+\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\\&=-\frac{2}{1-x}\log(1-x)-\frac{2x}{1-x^2}\\&=-\frac{2}{1-x}\left\{\log(1-x)+\frac{x}{1+x}\right\}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}g(x)&=\log(1-x)+\frac{x}{1+x}\\&=\log(1-x)+1-\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{-1}{1-x}+\frac{1}{(x+1)^2}\\&=\frac{x(x+3)}{(x-1)(x+1)^2}<0\quad(0<x<1\text{ より})\end{aligned}$$

$g(0)=0$ より $g(x)<0$　よって $f'(x)>0$

これと $f(0)=0$ より $f(x)>0$　よって示された.

第 18 講　積分の基礎

18　次の不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1)　$\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

(3)　$\displaystyle\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

(4)　$\displaystyle\int\frac{3x^3-4}{x^3-2x-4}dx$

【答】 (1) $\dfrac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$　(2) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C$　(3) $\dfrac{1}{3}\tan^3 x+C$

(4) $3x+\log\dfrac{(x-2)^2}{x^2+2x+2}+C$

【解説】

(1)　$$\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx=\int\{2(x+2)-3\}\sqrt{x+2}\,dx$$
$$=\int\left\{2(x+2)^{\frac{3}{2}}-3(x+2)^{\frac{1}{2}}\right\}dx=\boldsymbol{\frac{4}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+C}$$

(2)　$$\int\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx=\int\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+C}$$

(3)　$$\int\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx=\int(\tan x)^2(\tan x)'dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}\tan^3 x+C}$$

(4)　$$\int\frac{3x^3-4}{x^3-2x-4}dx=\int\left(3+\frac{6x+8}{x^3-2x-4}\right)dx$$
$$=\int\left\{3+\frac{6x+8}{(x-2)(x^2+2x+2)}\right\}dx=\int\left(3+\frac{2}{x-2}-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$
$$=3x+2\log|x-2|-\log(x^2+2x+2)+C=\boldsymbol{3x+\log\frac{(x-2)^2}{x^2+2x+2}+C}$$

第19講　部分積分

19　n は0または正の整数とし，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ であることを示せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$ を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $\dfrac{5}{128}\pi$

【解説】

(1)　$\sin^n x=\sin x\cdot\sin^{n-1}x$ と考えると

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx\\
&=\Big[-\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx\\
&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx\\
&=(n-1)(I_{n-2}-I_n)
\end{aligned}$$

$\therefore\quad nI_n=(n-1)I_{n-2}$

$\therefore\quad I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

(2)　$x-x^2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\theta$ とおくと

$$\begin{cases} x=0 \text{ のとき}\quad \theta=\pi \\ x=1 \text{ のとき}\quad \theta=0 \end{cases}$$

となるので

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$$

$$=\int_\pi^0\left\{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\right\}^2\sqrt{\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{16}\int_0^\pi(2\sin^2\theta-\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\theta-\sin^4\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}(2I_2-I_4)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2I_2-\frac{3}{4}I_2\right)$$

$$=\frac{5}{32}I_2$$

$$=\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

$$=\frac{5}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{5}{128}\pi}$$

第 20 講　置換積分

20　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とする．

(1)　I_1 を求めよ．

(2)　I_n+I_{n+2} を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} I_n=0$ を示せ．

【答】 (1) $\frac{1}{2}\log 2$　(2) $\frac{1}{n+1}$　(3) 略

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx\\&=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\log 1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}I_n+I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\\&=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

(3)　$0<x<\frac{\pi}{4}$ において $\tan x>0$　ゆえに $I_n>0$　このとき

$$0<|I_n|+|I_{n+2}|=I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(|I_n|+|I_{n+2}|)=0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}I_n=0$$

第21講　面積

21　$f(x)=(1+\log x)(e^{x\log x}-x^2)$ とする．

(1)　$e^{x\log x}$ の導関数を求めよ．不定積分 $\int x^2\log x\,dx$ を求めよ．

(2)　$e^{x\log x}=x^2$ となる x の値を求めよ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ $(x\geqq 1)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

【答】 (1) $e^{x\log x}(\log x+1)$，$\dfrac{1}{9}x^3(3\log x-1)+C$（$C$ は積分定数） (2) $x=1,\ 2$

(3) $\dfrac{8}{3}\log 2-\dfrac{13}{9}$

【解説】

(1)　$y=e^{x\log x}$ とおくと $\log y=x\log x$　この両辺を x で微分して

$$\frac{y'}{y}=\log x+1 \qquad \therefore\ y'=y(\log x+1)=\boldsymbol{e^{x\log x}(\log x+1)}$$

また $\left(\dfrac{1}{3}x^3\log x-\dfrac{1}{9}x^3\right)'=x^2\log x$ より

$$\int x^2\log x\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)+C}\quad \textbf{（C は積分定数）}$$

(2)

$$\begin{aligned} e^{x\log x}=x^2 &\iff x\log x=\log x^2\\ &\iff (x-2)\log x=0\\ &\therefore\ \boldsymbol{x=1,\ 2}\end{aligned}$$

(3)　$x\geqq 1$ のとき $1+\log x>0$　よって曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の x 座標は(2)より $x=1,\ 2$　ここで $1<x<2$ のとき

$$\begin{aligned} x-2<0 \text{ かつ } \log x>0 &\iff (x-2)\log x<0\\ &\iff e^{x\log x}<x^2\\ &\therefore\ f(x)<0\end{aligned}$$

であるので，求める面積は

$$\begin{aligned} &\int_1^2\{-f(x)\}dx\\ &=\int_1^2\{-e^{x\log x}(\log x+1)+x^2\log x+x^2\}dx\\ &=\left[-e^{x\log x}+\frac{1}{9}x^3(3\log x-1)+\frac{1}{3}x^3\right]_1^2\\ &=\left[-e^{x\log x}+\frac{1}{9}x^3(3\log x+2)\right]_1^2\\ &=\left\{-4+\frac{8}{9}(3\log 2+2)\right\}-\left\{-1+\frac{1}{9}(0+2)\right\}\\ &=\boldsymbol{\frac{8}{3}\log 2-\frac{13}{9}}\end{aligned}$$

第22講　体積

22　y 軸上の点 C(0, 1) に中心をもち，2直線 $y=bx$，$y=-bx$ に接する円 C がある．ただし，$b>0$ とする．

(1)　C の方程式を求めよ．

(2)　C と $y=bx$ の接点の x 座標が最大となるときの b の値を求めよ．

(3)　C の原点側の円弧と2直線で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させる．このときの回転体の体積 V を求めよ．ただし，b は(2)で得られた値を用いよ．

【答】 (1) $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{b^2+1}$　(2) $b=1$　(3) $V=\dfrac{(10-3\pi)\pi}{12}$

【解説】

(1)　C の半径は，$bx-y=0$ と点 C(0, 1) との距離

$$\frac{|b\times 0-1|}{\sqrt{b^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$$

と等しいので

$$C : \boldsymbol{x^2+(y-1)^2=\frac{1}{b^2+1}}$$

(2)　C と $y=bx$ との接点を P とすると，

$$\mathrm{CP}\perp\mathrm{OP}$$

より P は OC を直径とする円周上の点となるので，x 座標が最大となる点は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

ゆえに

$$\boldsymbol{b=1}$$

(3)

$$x^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}\iff y=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}$$

より，原点側の円弧は　$y=1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2}$

求める体積を V とおくと，もとの図形は y 軸に関して対称なので，

$$\frac{V}{2}=\int_0^{\frac{1}{2}}\pi\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)^2dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-x^2-2\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)dx-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\pi\left[\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}-2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{17}{24}\pi-2\pi\times\frac{\pi+2}{16}-\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{(10-3\pi)\pi}{24}$$

ゆえに，

$$V=\frac{(10-3\pi)\pi}{12}$$

第 23 講　積分でやっておくこと（その１）

23 実数 t に対して，$f(t)=\int_0^1|e^{-x}-t|\,dx$ とおく．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $f(t)$ を求めよ．

(2) $f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

【答】 (1) $f(t)=\begin{cases} -t+1-\dfrac{1}{e} & \left(t\leqq\dfrac{1}{e}\right) \\ -t+2t\log t+1+\dfrac{1}{e} & \left(\dfrac{1}{e}<t<1\right) \\ t-1+\dfrac{1}{e} & (t\geqq 1) \end{cases}$

(2) $t=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)^2$

【解説】

(1) (Ⅰ) $t\leqq\dfrac{1}{e}$ のとき $0<x<1$ において $e^{-x}-t>0$ であるので

$$f(t)=\int_0^1(e^{-x}-t)dx$$
$$=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_0^1$$
$$=\boldsymbol{-t+1-\frac{1}{e}}$$

(Ⅱ) $\dfrac{1}{e}<t<1$ のとき

$$\begin{cases} 0<x<-\log t \text{ において} & e^{-x}-t>0 \\ -\log t<x<1 \text{ において} & e^{-x}-t<0 \end{cases}$$

であるので，

$$f(t)=\int_0^{-\log t}(e^{-x}-t)dx+\int_{-\log t}^1(-e^{-x}+t)dx$$
$$=\Big[-e^{-x}-tx\Big]_0^{-\log t}+\Big[e^{-x}+tx\Big]_{-\log t}^1$$
$$=\boldsymbol{-t+2t\log t+1+\frac{1}{e}}$$

(Ⅲ) $t\geqq 1$ のとき $0<x<1$ において $e^{-x}-t<0$ であるので

$$f(t)=\int_0^1(-e^{-x}+t)dx$$
$$=\boldsymbol{t-1+\frac{1}{e}}\quad\text{((Ⅰ)より)}$$

(2)　$t \leqq \dfrac{1}{e}$ のとき $f(t)$ は単調減少で，$t \geqq 1$ のとき $f(t)$ は単調増加であるので最小値があるのは $\dfrac{1}{e} \leqq t \leqq 1$ の区間に限る．このとき

$$f'(t) = 2\log t + 1$$

より $f(t)$ の増減は

t	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

となるので，$f(t)$ の最小値は　$\boldsymbol{t = \dfrac{1}{\sqrt{e}}}$ のとき

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}} + 1 + \frac{1}{e}$$

$$= \boldsymbol{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}$$

第 24 講　積分でやっておくこと（その２）

24　k を正の整数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$ を示せ．

(2)　$e\sqrt{\dfrac{k}{k+1}}<\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e$ を示せ．ただし，e は自然対数の底とする．

【答】　略

【解説】

(1)　$\dfrac{d}{dx}(\log x)=\dfrac{1}{x}>0$，$\dfrac{d^2}{dx^2}(\log x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$ より $y=\log x$ のグラフは上に凸の増加関数のグラフであるので，$\mathrm{A}(k,\ 0)$，$\mathrm{B}(k+1,\ 0)$，$\mathrm{C}(k+1,\ \log(k+1))$，$\mathrm{D}(k,\ \log(k+1))$，$\mathrm{E}(k,\ \log k)$ としたときの長方形 ABCD，台形 ABCE の面積と比較することにより

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)$$

を得る．

(2)
$$\int_k^{k+1}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_k^{k+1}=(k+1)\log(k+1)-k\log k-1$$

と(1)の結果より

$$\begin{cases}\dfrac{\log k+\log(k+1)}{2}<\displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx\\ \displaystyle\int_k^{k+1}\log x\,dx<\log(k+1)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(2k+1)\{\log(k+1)-\log k\}>2\\ k\{\log(k+1)-\log k\}<1\end{cases}$$

$$\iff \frac{2}{2k+1}<\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}$$

$$\iff \frac{2k}{2k+1}<\log\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<1$$

$$\iff e^{\frac{2k}{2k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e$$

ここで

$$e^{\frac{2k}{2k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\iff e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\cdot\frac{2k+1}{2k}}$$

$$\iff e<\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$$

$$\iff e\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

$$\iff e\sqrt{\frac{k}{k+1}}<\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$$

となるので題意は示された．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。